This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

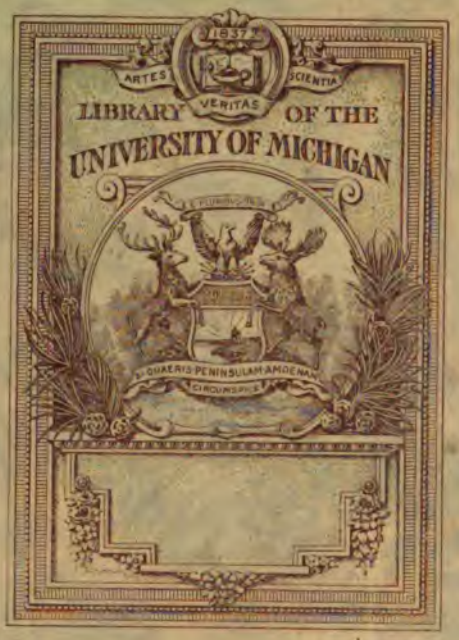
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 481323

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

QA
841
.R45

Digitized by Google

Digitized by Google

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Digitized by Google

Digitized by Google

N° D'ORDRE

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. J. RÉVEILLE

Ancien Élève de l'École Polytechnique
Agrégé de l'Université
Professeur d'Hydrographie de la Marine
Professeur d'Analyse et de Mécanique à l'École Navale

1re THÈSE. — ÉTUDE SYNTHÉTIQUE ET ANALYTIQUE DU DÉPLACEMENT D'UN SYSTÈME QUI RESTE SEMBLABLE A LUI-MÊME.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Novembre 1905, devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*
KŒNIGS, BOREL, } *Examinateurs*

PARIS

A. CHALLAMEL, ÉDITEUR
17, rue Jacob, 17
LIBRAIRIE MARITIME ET COLONIALE

1905

Digitized by Google

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Doyen	P. APPELL. . . .	Mécanique rationnelle
Doyen honoraire	G. DARBOUX Professeur	Géométrie supérieure
Professeurs honoraires	L. TROOST. . . .	
	Ch. WOLF. . . .	
Professeurs	LIPPMANN	Physique
	BOUTY	Physique
	BOUSSINESQ . . .	Physique mathématique et calcul des Probabilités
	PICARD.	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
	H. POINCARÉ . . .	Astronomie mathématique et Mécanique Céleste
	Y. DELAGE. . . .	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparées
	G. BONNIER . . .	Botanique
	DASTRE . . .	Physiologie
	DITTE	Chimie
	GIARD	Zoologie, Évolution des Êtres organisés
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale
	VÉLAIN.	Géographie physique
	GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral
	CHATIN.	Histologie
	PELLAT.	Physique
	HALLER.	Chimie organique
	H. MOISSAN . . .	Chimie
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.)
	JANET	Physique — —
	WALLERANT . . .	Minéralogie
	ANDOYER	Astronomie physique
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales
	HAUG	Géologie
	Dr CURIE	Physique
	TANNERY	Calcul différentiel et calcul intégral
	RAFFY.	Application de l'Analyse à la Géométrie
	HOUSSAY	Zoologie
	N.	Chimie biologique
	N.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparées
Professeurs adjoints	PUISEUX . . .	Mécanique et Astronomie
	RIBAN	Chimie analytique
	LEDUC	Physique
	HADAMARD. . . .	Calcul différentiel et calcul intégral
	MATRUCHOT . . .	Botanique
	MICHEL.	Minéralogie
	DAGUILLON. . . .	Botanique
	BOUVEAULT . . .	Chimie organique
	BOREL	Théorie des fonctions
Secrétaire	A. GUILLET	

Digitized by Google

AU

COLONEL MANNHEIM

PROFESSEUR HONORAIRE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

—

A

MONSIEUR LIGNIER

EXAMINATEUR DES ÉCOLES D'HYDROGRAPHIE EN RETRAITE.

158038

Digitized by Google

Digitized by Google

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE ET ANALYTIQUE
DU DÉPLACEMENT D'UN SYSTÈME QUI RESTE SEMBLABLE A LUI-MÊME

INTRODUCTION

Le célèbre mémoire publié par Chasles en 1843 a fondé la théorie du déplacement d'un système invariable. L'analyse appliquée à cette question montre que la relation qui lie les coordonnées de deux points correspondants dans deux positions du système, est homographique, mais d'une homographie très particulière. En 1873, M. Durrande, dans un *Essai sur le déplacement d'une figure de forme variable* (1), donne une grande généralité à cette homographie ; mais pour deux positions quelconques du système qu'il considère, les plans de l'infini se correspondent.

Le cas ainsi étudié rentre à son tour, sous le nom de *déformation homogène*, dans l'étude plus générale de *la déformation et de la cinématique d'un milieu continu*, à laquelle tant de travaux remarquables ont été consacrés.

La grande extension qui a été ainsi donnée à la généralité de la question primitive n'enlève pas l'intérêt qui s'attache à l'étude particulière de chaque cas remarquable. C'est ainsi qu'à la suite de Chasles, et à ne considérer que le cas du système invariable, s'est inscrite une liste des noms des plus excellents géomètres.

Après le système invariable semble se présenter, comme sa généralisation la plus voisine, le système qui reste semblable à lui-même. Chasles, que l'on retrouve à l'origine de toutes les questions de Géométrie moderne, montre que dans le déplacement fini d'une figure plane qui reste, dans son plan, semblable à elle-même, il existe à distance finie un point qui est à lui-même son homo-

(1) Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.

Digitized by Google

logue (1). Au sujet d'un système à trois dimensions, Chasles montre encore que « deux corps semblables étant placés d'une manière quelconque, il existe un certain point o qui, considéré comme appartenant à l'un des corps, est lui-même son homologue dans l'autre corps. Il suffit de faire tourner l'un des corps autour d'une droite passant par ce point pour l'amener à être homothétique à l'autre (2). »

La théorie d'un pareil déplacement dans le plan a été l'objet des travaux de nombreux auteurs, par des méthodes très diverses (3). Dans l'espace, M. Fouret s'est occupé du cas très particulier où le système reste homothétique à lui-même (4). Je me suis proposé, dans l'étude actuelle, de démontrer ou de découvrir les propriétés principales du déplacement soit fini, soit continu d'un système à trois dimensions qui reste semblable à lui-même.

J'emploie d'abord, exclusivement la méthode synthétique, et pour mieux marquer le caractère de plus grande généralité qui caractérise certaines propriétés, j'examine rapidement le cas de deux systèmes reliés entre eux par l'homographie la plus générale. Le complexe tétraédral des droites qui joignent deux points homologues ou qui sont les intersections de deux plans homologues, deviendra plus tard celui des vitesses et des caractéristiques. Même remarque sur les quadriques, les cubiques et les développables du complexe. La congruence formée par les droites qui joignent les points d'un plan à leurs homologues se simplifie quand le plan passe par un sommet ou une arête du tétraèdre double de l'homographie. Dans le premier cas, les droites de la congruence rencontrent une droite fixe, et touchent un cône du second degré ; dans le second cas, elles rencontrent deux droites fixes.

Quand l'homographie qui relie les deux systèmes conserve le plan de l'infini, les deux systèmes ont, en général, un point double O à distance finie. Si nous appelons *déplacement* d'un point A le segment AA′ qui le joint à son homologue, le vecteur Oa, mené, par le point O, égal et parallèle à AA′ forme un système σ de points a qui est homographique aux deux systèmes donnés. On en déduit aussitôt l'existence du foyer, de la droite adjointe, du plan adjoint d'un plan ; des points d'un plan dont les déplacements sont égaux, ou également inclinés sur une direction donnée.

Considérant maintenant trois systèmes ayant le plan de l'infini pour plan double commun, je montre l'existence de la cubique dont tous les points sont

---

(1) *Bulletin universel des Sciences* ; aperçu historique (additions).

(2) Rapport sur les progrès de la Géométrie.

(3) Grojard, Burmester, Geisenheimer, Formenti, Petersen, Tarry...

(4) Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences.

Digitized by Google

en ligne droite avec leurs deux homologues ; de la surface du troisième ordre, lieu des points dont les plans osculateurs passent par un point donné. Ajoutons un quatrième système, nous voyons que le lieu des points tels que les quatre homologues soient dans un même plan, est dans chaque système une surface du troisième ordre ; avec cinq systèmes, on a le lieu des points tels que cinq points homologues soient dans un même plan ; c'est une courbe du sixième ordre ; enfin avec six systèmes, on a 10 points dans chaque système qui sont dans un même plan avec leur cinq homologues.

On obtient de même des résultats intéressants pour les droites qui restent parallèles à un plan, ou pour les plans qui restent parallèles à une droite.

Je passe maintenant à deux systèmes semblables, et je rappelle la propriété, due à Chasles, de l'existence d'un point homologue commun. J'établis ensuite cette propriété que si l'on prend sur la droite MM′ qui joint deux points homologues un point t tel que $\frac{tM'}{tM}$ soit égal au rapport de similitude, le lieu du point t est le plan double réel à distance finie. Deux courbes homologues des deux systèmes se projettent sur ce plan suivant deux figures semblables, et le lieu de la trace sur le plan double de la droite qui joint deux points homologues de ces courbes est semblable aux deux projections.

Dans le déplacement continu, cette propriété s'applique aux tangentes des trajectoires, et facilite considérablement l'étude du complexe de ces droites. Je signalerai particulièrement ce résultat : que l'on obtient les caractéristiques de tous les plans qui passent par un même point du plan double, en projetant sur ces plans une même droite parallèle à l'axe instantané. Un rôle intéressant est joué par l'hyperboloïde H, lieu des caractéristiques des plans passant par une même droite, et aussi lieu des cubiques du complexe relatives à tous les points de cette droite.

Les droites qui engendrent des surfaces réglées de même paramètre coïncident avec le complexe des vitesses relatif à un déplacement infiniment petit ayant même axe instantané, mais dont le pôle double serait différent de O. Les points centraux sont ceux qui dans ce nouveau déplacement ont leurs vitesses dirigées suivant ces droites.

J'introduis ici la notion du mouvement inverse ou indirect, dont Schœnflies a tiré un si utile parti. Mais il faut maintenant supposer que le système mobile est non seulement fixe, mais invariable, et donner à l'espace fixe non seulement un mouvement, mais une variation de grandeur. Une application immédiate donne le lieu des points du système qui, dans un déplacement fini, se trouvent, dans leurs deux positions, à des distances égales d'un point donné de l'espace fixe ; et c'est ainsi que s'introduit la sphère Φ qui joue un grand

Digitized by Google

rôle dans le déplacement continu où elle se présente d'abord comme le lieu des foyers des plans et des droites qui passent par un point donné. On voit aussitôt que le lieu des points tels que leurs axes de courbure passent par un point donné est un cercle, et qu'il y a deux points tels que la sphère osculatrice de leurs trajectoires passe par un point donné.

Après quelques propositions sur le déplacement fini et les pôles doubles de trois ou quatre systèmes pris deux à deux, j'aborde le problème qui consiste à déterminer les caractéristiques du déplacement, c'est-à-dire le pôle double et l'axe instantané, connaissant les trajectoires de trois points du système.

On voit tout de suite que la question se ramène à construire trois sphères répondant à des conditions géométriques généralement bien déterminées.

La solution purement géométrique du problème s'appuie sur les propriétés géométriques de trois sphères qui ont deux points réels communs, et de deux systèmes de triangles qui leur sont attachés. Une autre méthode s'inspire plus particulièrement des propriétés acquises du déplacement continu. Une troisième méthode combinant d'une autre manière ces mêmes propriétés, conduit à la construction qui résultera plus tard de la solution analytique du problème.

La question est complétée par l'étude des cas particuliers qui rendent le problème indéterminé.

J'aborde maintenant l'étude analytique par le développement en série des coordonnées d'un point suivant les puissances croissantes d'un paramètre t, dans le mouvement direct et dans le mouvement inverse. Je développe de même les coordonnées d'un plan et les coordonnées plückériennes d'une droite, et je remarque que les coefficients des diverses puissances de t sont des fonctions linéaires des valeurs initiales des coordonnées. J'établis ensuite des identités, qui seront utiles plus tard, entre les coefficients de chaque développement.

Comme application immédiate de ce qui précède, je développe suivant les puissances de t les coordonnées des points qui deviendront successivement centre instantané dans l'espace et dans le système.

Au moyen des premiers termes des développements des coordonnées, je puis étudier aisément tout ce qui est relatif aux éléments du premier ordre, et retrouver d'abord tous les résultats acquis par la synthèse, relativement aux foyers, aux caractéristiques, à la sphère Φ, au complexe des vitesses ou des droites qui engendrent des surfaces de même paramètre.

Il existe dans le déplacement continu d'un système invariable une infinité de courbes qui sont normales aux trajectoires de tous leurs points ; mais si on cherche celles de ces lignes qui sont dans un plan donné, on trouve que ce sont toutes les droites qui passent par son foyer.

Digitized by Google

Dans le système que j'étudie, ces droites sont remplacées par des spirales logarithmiques ; mais si le plan est parallèle à l'axe instantané, ce sont des cercles qui jouent un rôle très analogue à celui des normales dans le système invariable.

Ils donnent naissance à un système focal où les plans sont remplacés par des sphères ; et enfin à tout cercle dont le centre est dans le plan double, et dont le plan est parallèle à l'axe instantané, ils donnent un cercle conjugué.

J'étudie ensuite la correspondance quadratique d'un plan et de son foyer ; je montre en particulier qu'entre l'enveloppe d'un plan et le lieu de son foyer il existe la même relation, à une homographie près, qu'entre une surface anallagmatique et sa déférente.

Une autre correspondance intéressante est celle qui a lieu entre un plan et le point dont la vitesse est la caractéristique de ce plan. Cette correspondance est involutive et, pour un choix convenable des tétraèdres de référence, elle prend la forme $XX' = YY' = ZZ' = \frac{\lambda(\lambda^2 + r^2)}{r^2}$; X', Y', Z', étant les coordonnées du point, X, Y, Z celles du plan. Après la détermination des courbes telles que les vitesses de leurs points forment une surface développable, et l'étude de la vitesse et de l'accélération en un point fixe de l'espace, je passe à l'étude des éléments du second ordre. Je détermine d'abord le centre et l'ellipsoïde des accélérations, ainsi que la cubique des inflexions.

L'étude des contacts des divers ordres des plans avec les trajectoires amène d'abord à la surface du troisième ordre, déjà rencontrée, dont tous les points sont tels que les plans osculateurs de leurs trajectoires passent par un même point. L'enveloppe des plans osculateurs relatifs à tous les points d'une droite est une développable de la troisième classe qui se simplifie quand la droite rencontre une fois ou deux fois la cubique des inflexions. Je retrouve enfin la surface, la courbe et les dix points relatifs aux plans qui ont des contacts du 3e, 4e et 5e ordre.

Suit une étude analogue faite au moyen des termes du second ordre dans les coordonnées de plans, et se rapportant aux plans qui passent à 3, 4,... instants consécutifs par le même point ou, ce qui revient au même, sont des plans osculateurs, surosculateurs,... dans le mouvement inverse. Enfin les plans sont aussi classés au point de vue de la propriété qui consiste à rester parallèle à une même droite, ou à passer par une même droite.

Cette même question traitée dans le mouvement inverse conduit aussitôt aux droites qui restent parallèles à un même plan, ou contenues dans un même plan ; mais l'étude directe en est faite au moyen des coefficients des développements des coordonnées de droites. On trouve de même les

Digitized by Google

droites qui, à trois instants consécutifs, passent par un même point ; et le lieu de ces points est naturellement la cubique d'inflexion dans le mouvement inverse.

Les droites du système qui, à deux instants consécutifs, rencontrent une droite donnée, forment un complexe linéaire ; pour trois instants consécutifs, elles forment une quadrique ; pour quatre, elles sont au nombre de deux. Allant plus loin, la droite rencontrée n'est plus arbitraire ; cette réserve faite, les droites du système qui rencontrent une même droite fixe à cinq ou à six instants consécutifs, forment une congruence, ou sont en nombre fini.

J'arrive maintenant aux axes de courbure des trajectoires ; le lieu des points pour lesquels les axes de courbure passent par un même point est un cercle, et le lieu des axes de courbure de trajectoires des points d'une droite est une surface du troisième ordre.

Je détermine ensuite le centre d'une sphère osculatrice ; le lieu des centres relatifs à tous les points d'une droite est une cubique gauche. Le lieu des points qui, à quatre instants consécutifs, sont sur un même cercle est une courbe du neuvième ordre ; celui des points qui, à cinq instants consécutifs, sont sur une même sphère, est une surface du cinquième ordre ; pour six instants consécutifs, on a une courbe du sixième ordre ; pour sept, on a quarante-deux points.

Je résouds et je discute complètement par la voie analytique le problème qui consiste à déterminer les éléments caractéristiques du déplacement, connaissant les tangentes aux trajectoires de trois points. Je me donne ensuite les surfaces trajectoires de six points du système, et je ramène le problème à la résolution d'un système simultané de six équations du premier degré. Le problème est indéterminé quand les six normales font partie d'un même complexe linéaire. Il y a alors une infinité de déplacements compatibles avec les données ; pour tous ces déplacements, le lieu du centre instantané est une cubique gauche, l'enveloppe du plan double un cylindre parabolique, le lieu de l'axe instantané un conoïde. La droite qui coïncide avec l'axe du complexe, décrit, pour tous ces déplacements, un même élément de surface réglée, dont le plan central est le plan directeur du conoïde des axes instantanés.

Cette question sert de transition naturelle pour arriver à la seconde partie de cette étude, où je considère les déplacements à deux paramètres. Si, en effet, dans cette question le problème est indéterminé, c'est qu'une quelconque des six surfaces est celle qui est décrite dans le mouvement à deux paramètres défini par les cinq autres.

On est alors amené à prendre pour axe des z l'axe du complexe, pour origine le point central de la surface qu'il engendre, pour plan des zx le plan central. Avec ce choix des axes, tout déplacement du système s'obtient : 1° par un

Digitized by Google

déplacement qui laisse le système invariable, l'axe instantané glissant étant l'axe des z ; 2° par une rotation autour de l'axe des x, suivie d'une homothétie ayant pour centre l'origine, et d'une translation fixe située dans le plan des zx. Chacun de ces deux déplacements a son paramètre, et on est ainsi amené, pour l'étude des éléments du premier ordre, à des formules très simples donnant les variations des coordonnées des points, des plans, et des droites du système. A l'aide de ces formules, on retrouve immédiatement les propriétés relatives aux lieux des centres instantanés, des axes instantanés, et à l'enveloppe des plans doubles. On obtient aisément le plan tangent en un point, la caractéristique d'un plan, le point où le plan touche la surface qu'il enveloppe, une relation simple entre le plan, tangent et la normale.

La cubique Γ lieu des centres instantanés se présente aussi comme le lieu des points qui décrivent un élément de ligne au lieu d'un élément de surface, et, par conséquent, comme l'analogue des droites D, Δ dans le système invariable. Même remarque pour le conoïde des axes et le cylindre des plans doubles. Le lieu des foyers d'un plan est le cercle circonscrit aux 3 points d'intersection de la cubique Γ et du plan ; c'est aussi l'intersection du plan avec une quadrique passant par la cubique. On voit alors, par analogie, avec les systèmes plans, que toutes les normales qui passent par un point donné sont dans un même plan, et que dans ce plan le lieu des pieds des normales est un cercle. Si on fait tourner ce plan autour d'une normale, le lieu du cercle est une cyclide cubique.

L'étude du déplacement d'une droite conduit à l'équation du complexe des vitesses en fonction des deux paramètres ; on voit alors qu'il existe en général deux déplacements pour lesquels une droite décrit un élément de surface développable ; pour que ces éléments soient perpendiculaires entre eux, la droite doit appartenir à un complexe linéaire. Si elle appartient à une certaine surface, elle engendre un élément de surface développable pour tous les déplacements. Il existe une seule droite réelle qui décrit, pour tous les déplacements un même élément de surface développable.

Digitized by Google

Digitized by Google

ETUDE

SYNTHÉTIQUE ET ANALYTIQUE

DU DÉPLACEMENT D'UN SYSTÈME

QUI RESTE SEMBLABLE A LUI-MÊME

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE

SYNTHÉTIQUE ET ANALYTIQUE

DU DÉPLACEMENT D'UN SYSTÈME

QUI RESTE SEMBLABLE A LUI-MÊME

I

LE SYSTÈME RESTE HOMOGRAPHIQUE A LUI-MÊME

1. — Soit un système Σ d'éléments géométriques remplissant l'espace fixe S. Si ce système se déplace de manière que les distances mutuelles de tous ses points restent constantes, on est dans le cas qui a été complètement étudié d'un système invariable. Je me propose d'étudier le déplacement du système dans le cas où les rapports des distances mutuelles de tous ses points restent constants, et je dis alors que le système Σ reste semblable à lui-même.

Certaines propriétés de ce déplacement subsistent dans le cas où les conditions imposées à Σ sont plus générales encore : où, par exemple, le système Σ se déplace et se déforme de manière que dans toutes ses positions il reste homographique à lui-même, soit que dans cette homographie le plan de l'infini soit conservé, soit même que l'homographie soit tout-à-fait générale.

Digitized by Google

Le système Σ peut se déplacer et se déformer d'une manière continue, et il y a lieu d'étudier les propriétés infinitésimales des courbes décrites par les différents points, des surfaces enveloppées par les plans, ou décrites par les droites du système. On peut aussi considérer une, deux, trois... positions non infiniment voisines, et les propriétés infinitésimales se déduisent de celles qu'on a ainsi obtenues, en faisant tendre chaque position vers la précédente.

2. — Les systèmes Σ et Σ' sont homographiques.

Considérons d'abord deux systèmes Σ et Σ' homographiques suivant l'homographie la plus générale, et qui ne sont pas infiniment voisins. On sait que les deux systèmes ont 4 points doubles et 4 plans doubles formant un tétraèdre que j'appellerai le tétraèdre double.

Les droites qui joignent deux points homologues des deux systèmes, forment un complexe du second ordre appelé tétraèdral dont le tétraèdre double est la surface des singularités. Le lieu de toutes les droites du complexe qui passent par un point donné A est un cône du second ordre Γ, passant par les sommets du tétraèdre, ; le lieu des couples de points homologues qui se trouvent sur les génératrices de ce cône se composent de deux cubiques gauches homologues : c'est ce que l'on peut voir comme il suit.

Soit A' le point homologue de A considéré comme appartenant au système Σ ; soient aussi m et m' deux points homologues situés sur une même génératrice du cône Γ. La droite $A'm'$ est dans le système Σ' l'homologue de Am dans le système Σ : et si l'on considère tous les points tels que m du cône Γ, les droites telles que $A'm'$ forment le cône Γ' homologue de Γ ; donc les points m' sont sur la courbe d'intersection des deux cônes Γ et Γ'. D'ailleurs ces deux cônes ont AA' pour génératrice commune ; leur intersection est donc une cubique gauche. Cette cubique passe par les sommets du tétraèdre double.

On sait aussi que le complexe précédent peut être considéré comme défini par les intersections des plans homologues des deux systèmes, et que la conique de ce complexe est tangente aux 4 faces du tétraèdre. On démontrerait que les surfaces développables engendrées par les plans de Σ et de Σ' dont les intersections sont les tangentes de la conique, sont des surfaes du 4e ordre et de la 3e classe, tangentes aux quatre faces du tétraèdre double.

Soient maintenant trois systèmes homographiques deux à deux $\Sigma\,\Sigma'\,\Sigma''$, et considérons dans Σ un faisceau F de plans passant par une droite D ; à ce faisceau et à cette droite correspondent, dans les systèmes Σ', Σ'', les fais-

Digitized by Google

ceaux F′, F″, et les droites D′, D″. Les intersections des plans homologues des faisceaux F et F′ engendrent une quadrique réglée ; il en est de même pour les faisceaux F′ et F″. Ces deux quadriques ayant la génératrice D′ commune, le reste de leur intersection est une cubique gauche, qui est le lieu des points d'intersection des plans homologues P P′ P″ des trois faisceaux.

Corrélativement, si l'on considère l'ensemble des points situés sur une droite D de Σ, les plans passant par trois points homologues A A′ A″ des trois droites D D′ D″, enveloppent une développable de la 3e classe.

En supposant les systèmes infiniment voisins, les propositions précédentes deviennent autant de propriétés relatives aux tangentes et aux plans osculateurs des trajectoires, et aux caractéristiques des plans du système.

3. — L'homographie de Σ, Σ′,..., conserve le plan de l'infini.

Si l'on considère deux systèmes Σ et Σ′, une des faces du tétraèdre double est à l'infini ; soit O le point double, réel, à distance finie. Par ce point O menons une droite Oa égale et parallèle à la droite A A′ qui joint deux points homologues des deux systèmes, et qu'on peut appeler le déplacement du points A. Le système σ des points a est homographique aux systèmes Σ et Σ′ des points A et A′, et les trois systèmes ont le même tétraèdre double.

De là découlent immédiatement des conséquences intéressantes. Par exemple, quand A décrit une droite D, a décrit une droite homologue d, et les déplacements des points A sont tous parallèles au plan O,d. Ainsi les déplacements AA′ des points A d'une droite D sont portés par les génératrices d'un paraboloïde. On peut s'en rendre compte aussi en remarquant que les points homologues A A′ déterminent sur D et D′ des divisions semblables.

Si la droite d passe par l'origine O, il en est de même de la droite D ; ce qui montre que le lieu des points de Σ dont les déplacements sont parallèles entre eux est une droite passant par l'origine.

Le foyer d'un plan étant le point de ce plan dont le déplacement lui est perpendiculaire, on voit que le lieu des foyers de plans parallèles est une droite passant par l'origine, qui est l'adjointe de tous ces plans.

Soit maintenant un plan p du système σ, et le plan π, mené par O parallèlement à p ; soient aussi P et Π les plans de Σ homologues de p et de π. Les déplacements des divers points de P sont égaux et parallèles aux segments qui joignent l'origine O aux points homologues de p. Les projections de ces

Digitized by Google

segments sur une perpendiculaire au plan p sont égales à la distance de l'origine à ce plan, ou, si l'on veut, à la distance δ des deux plans p et π.

Aux plans $P_1, P_2, \ldots$ parallèles à P correspondent les plans homologues $p_1, p_2, \ldots$ parallèles à p, et les projections des déplacements des points de $P_1, P_2, \ldots$ sur une perpendiculaire à p sont égales respectivement aux distances des plans $p_1, p_2, \ldots$ au plan π. Mais ces distances sont proportionnelles aux distances des plans $P_1, P_2, \ldots$ au plan Π. On peut donc conclure, d'une manière générale que le déplacement d'un point du système Σ estimé suivant une certaine direction est proportionnel à la distance de ce point à un certain plan Π passant par l'origine, et qui est dit *adjoint* à cette direction. Ce plan Π est donc le lieu des points de Σ dont les déplacements sont perpendiculaires à la direction considérée (1).

L'intersection d'un plan P avec le plan Π correspondant, c'est-à-dire avec le plan adjoint à la perpendiculaire au plan P, est une droite C qui jouit de cette propriété que les déplacements de tous ses points sont dans le plan P. La droite C′ homologue de C dans le système Σ' est l'intersection du plan P et de son homologue P′.

Considérons dans le système σ un cône de révolution γ ayant son sommet au point O, et ayant pour axe une droite d ; son homologue dans le système Σ est le cône Γ, lieu des points dont les déplacements font un même angle avec la droite d. La droite D, homologue de d est le lieu des foyers des plans de Σ perpendiculaires à d. Si l'angle du cône γ varie, son axe restant fixe, le cône reste tangent aux deux plans isotropes passant par cet axe ; en même temps, le cône Γ reste tangent à deux plans fixes imaginaires.

Le plan P coupe le cône Γ suivant une conique, laquelle, si P est perpendiculaire à l'axe d de γ, est le lieu des points de ce plan dont les déplacements font avec ce plan un même angle ; cette conique est, d'après ce qui précède, tangente à deux droites imaginaires se coupant au foyer du plan P.

Le plan π mené par O parallèlement à P coupe le cône γ suivant les deux génératrices de contact des plans isotropes ; donc le plan Π, adjoint de P, et homologue de π, coupe le cône Γ suivant les génératrices de contact des deux plans imaginaires, et le plan P lui-même suivant la corde de contact de la conique du plan P avec les deux tangentes menées du foyer du plan. Cette corde de contact n'est donc autre que la droite lieu géométrique des points du plan qui ont leur déplacement dans ce plan.

On peut se proposer aussi de trouver le lieu géométrique des points d'un plan P qui ont des déplacements égaux. On voit aussitôt que c'est l'intersection

(1) Durrande.

Digitized by Google

du plan avec l'ellipsoïde E homologue, dans Σ d'une sphère ε de σ ayant son centre à l'origine O.

Les ellipsoïdes E, correspondant aux sphères ε, sont homothétiques et concentriques ; il en est un qui touche le plan P ; le point de contact est le point du plan qui a le plus petit déplacement. Il est intéressant de savoir si ce plan peut être le foyer du plan. Soit T le point où le plan P touche l'ellipsoïde E ; il a pour homologue dans σ le point t où le plan p touche la sphère ε. Le point T est le foyer de P si Ot est perpendiculaire à P. Or Ot est évidemment perpendiculaire à p ; donc p et P doivent être parallèles et couper le plan double à l'infini suivant une même droite, ce qui ne peut avoir lieu que si cette droite est une arête de la face à l'infini du tétraèdre double.

Ainsi *les plans pour lesquels le point de déplacement minimum est foyer, sont ceux qui sont parallèles aux plans doubles à distance finie.*

Il faut remarquer aussi que, sur ces plans, le lieu des points dont les déplacements sont égaux coïncide avec celui des points dont les déplacements font des angles égaux avec la normale au plan.

4. — Soient maintenant trois systèmes homographiques Σ, Σ', Σ'', ayant le plan de l'infini pour plan double commun. Les systèmes Σ et Σ' ont, à distance finie, un point double O, Σ' et Σ'' un point double O', enfin Σ et Σ'' un point double O''.

Soient A' et A'' les homologues dans Σ' et Σ'' d'un point A du système Σ ; au point A de ce système correspond le plan P_A qui contient les 3 points A A' A'' ; de même à un plan P du système Σ correspond dans ce plan un point A_P qui est l'intersection de P et de ses homologues P' et P''.

Proposons-nous de trouver le lieu des points A dont les plans P_A passent par un point fixe donné B, et, pour cela, cherchons combien il y a de ces points sur une droite quelconque donnée D.

Soient D' et D'' les homologues dans Σ' et Σ'' de la droite D considérée comme faisant partie de Σ.

Lorsque le point A décrit la droite D, la droite A A' engendre un paraboloïde qui contient les droites D et D' ; et le plan A A' B est tangent à ce paraboloïde. De même la droite A' A'' engendre un paraboloïde contenant les droites D' et D'' ; et tout plan A A' A'' qui passe par B est un plan tangent commun aux deux paraboloïdes. Comme ils ont une génératrice commune D', on ne peut leur mener du point B que 3 plans tangents communs. Ainsi la droite D rencontre le lieu cherché en 3 points, et le lieu est une surface S_3 du 3e degré.

Nous verrons bientôt que toutes les surfaces S_3 passent par une même cubique gauche C_3, lieu des points A qui sont en ligne droite avec leurs homo-

Digitized by Google

logues A′ A″. Donc, l'intersection de deux surfaces S_3 se compose, outre cette cubique, d'une courbe du 6e ordre ; et on peut énoncer que le lieu des points A dont les plans P_A passent par une même droite est une courbe du 6e ordre. De même l'enveloppe des plans P dont les points A_P décrivent une même droite, est une développable de la 6e classe.

Par un point quelconque Ω de l'espace, je mène les droites Ωa, $\Omega a'$ respectivement égales et parallèles aux segments AA′, A′ A″ ; et j'appelle *accélération* du point A le segment $a\ a'$. Les systèmes σ et σ' formés par l'ensemble des points a et l'ensemble des points a' sont homographiques entre eux, et aux systèmes Σ.

Quand les points A A′ A″ sont en ligne droite, les points a et a' sont sur un même vecteur partant du point Ω, et nous avons vu que les droites qui, joignant deux points homologues, passent par un point fixe, forment un cône du second degré, et que les points homologues forment sur ce cône deux cubiques gauches. Il en résulte que le lieu des points A du système Σ qui sont en ligne droite avec leurs homologues A′ A″ est une cubique gauche C_3 qui passe évidemment par O et O″.

Quand les points A A′ A″ sont en ligne droite, le plan A A′ A″ est indéterminé ; il en résulte que la cubique C_3 fait partie du lieu S_3 des points dont les plans P_A passent par un point fixe donné.

Si maintenant on mène un rayon $O\alpha$ égal et parallèle à $a\ a'$, les points α forment un système s homographique aux précédents. On est alors conduit pour les accélérations à des propriétés analogues à celles des déplacements ; par exemple pour le lieu des points de Σ dont les accélérations font un angle constant avec une direction donnée, ou dont les accélérations sont égales. Il y a un point réel de Σ dont l'accélération est nulle ; c'est l'homologue dans Σ du point o de s. Ce point est évidemment sur la cubique C_3.

Il est facile de voir que si on considère 3 systèmes *plans*, situés dans le même plan, et homographiques deux à deux, d'une homographie générale, il existe dans chaque système, en général, une infinité de points en ligne droite avec leurs deux homologues, et ces points se trouvent sur une cubique ; d'ailleurs ces lignes droites qui portent 3 points homologues enveloppent une courbe de la 3e classe. Corrélativement, il existe dans chaque système une infinité de droites qui passent par le point d'intersection de leurs deux homologues ; ces droites enveloppent une courbe de la 3e classe, et les points d'intersection sont sur une courbe du 3e ordre.

Considérons alors les traces des droites homologues D D′ D″ des systèmes Σ Σ′ Σ″ sur le plan de l'infini ; elles forment 3 points homologues de 3 systèmes plans homographiques. On conclut de ce qui précède que les

Digitized by Google

droites de Σ qui sont parallèles à un même plan avec leurs homologues dans Σ' et Σ'', sont parallèles aux génératrices d'un cône du 3e ordre, et les plans auxquels ces droites sont parallèles sont eux-mêmes parallèles aux plans tangents d'un cône de la 3e classe. Enfin les plans de Σ qui sont parallèles aux intersections de leurs homologues dans Σ' et Σ'', sont aussi parallèles aux plans tangents d'un cône de la 3e classe, tandis que ces intersections sont elles-mêmes parallèles aux génératrices d'un cône du 3e ordre.

5. — Soient maintenant quatre systèmes homographiques Σ, Σ', Σ'', Σ''', le plan de l'infini étant toujours un plan double commun. Proposons-nous de trouver le lieu des points A du système Σ tels que les quatre points A A' A'' A''' soient dans un même plan.

D'un point O quelconque de l'espace menons les vecteurs Oa, Oa', Oa'', respectivement égaux et parallèles aux segments AA', AA'', AA'''. Les 3 systèmes formés par les points a, a', a'', sont homographiques entre eux et aux systèmes Σ, le plan de l'infini étant un plan double commun.

Si les points A A' A'' A''' sont dans un même plan, il en est de même des vecteurs Oa, Oa', Oa'' ; le point a est donc tel que le plan $a\,a'\,a''$ passe par le point O. Nous avons vu que le lieu géométrique d'un tel point est une surface du 3e ordre ; le lieu cherché pour le point A est donc aussi une surface du 3e ordre. Cette surface contient évidemment la cubique C_3 des points tels que A A' A'' soient en ligne droite, car alors les quatre points A A' A'' A''' sont dans un même plan.

Considérant un système de plus Σ^{iv}, on voit que le lieu des points, dans l'un quelconque des systèmes, tels que 5 points homologues soient dans un même plan, est l'intersection de deux surfaces du 3e ordre. Mais il faut observer que, si l'on considère le lieu dans le système Σ'', par exemple, la surface du 3e degré, lieu de A'', pour laquelle les points A A' A'' A''' sont dans un même plan contient la cubique C''_3 pour laquelle les points A' A'' A''' sont en ligne droite ; et la surface du 3e degré, lieu de A'', pour laquelle les 4 points A' A'' A''' A^{iv} sont dans un même plan contient aussi la cubique C''_3. Cette cubique ne fait pas partie du lieu. Donc les deux surfaces se coupent, en dehors de cette cubique, suivant une courbe du 6e ordre qui est le lieu cherché.

Enfin ajoutons un nouveau système Σ^{v} ; le point A'', par exemple, appartient aux 3 surfaces du 3e degré, S'' S''_1 S''_2 pour lesquelles les points A A' A'' A''', A' A'' A''' A^{iv}, A'' A''' A^{iv} A^{v}, sont dans un même plan. Ces 3 surfaces se coupent en 27 points ; mais il faut en rejeter un certain nombre. En effet, la cubique

Digitized by Google

C'' lieu des points A'' pour lesquels $A' A'' A'''$ sont en ligne droite appartient à la fois aux surfaces S'' et S''_1, elle rencontre S''_2 en 9 points qui ne font pas partie du lieu. De même la cubique C''_1, lieu des points A'' pour lesquels $A'' A''' A^{iv}$ sont en ligne droite appartient à la fois à S''_1 et à S''_2, et elle rencontre S'' en 9 points à rejeter également. Mais il faut observer que les cubiques C'' et C''_1 ont un point commun, c'est le point double à distance finie des systèmes Σ'' et Σ'''. Ce point a donc été compté deux fois : il n'y a donc pas 18 points, mais 17 points seulement à rejeter, et ainsi il en reste 10 (1).

Si l'on considère 4 systèmes homographiques plans $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$, situés dans un même plan, le lieu des points a du système σ qui sont en ligne droite avec leurs homologues $a' a''$, est une cubique passant par les sommets du triangle double des systèmes σ et σ', et aussi par les sommets du triangle double des systèmes σ' et σ''. De même le lieu des points a de σ, tels que les points $a\, a'\, a'''$, dans les systèmes homographiques $\sigma\, \sigma'\, \sigma'''$, soient en ligne droite, est une cubique passant par les sommets du triangle double de σ et σ', ainsi que par les sommets du triangle double de σ et σ'''. Ces deux cubiques sont donc circonscrites à un même triangle $(\sigma\, \sigma')$, et par suite se coupent en 6 autres points, pour lesquels les points $a\, a'\, a''\, a'''$ sont en ligne droite.

Corrélativement, les droites d telles que $d\, d'\, d''\, d'''$ passent par un même point sont au nombre de 6.

Appliquant ces résultats aux systèmes à 3 dimensions $\Sigma\, \Sigma'\, \Sigma''\, \Sigma'''$, et aux systèmes $\sigma\, \sigma'\, \sigma''\, \sigma'''$ formés par les points de ces systèmes situés dans le plan de l'infini, on voit qu'*il y a 6 directions de droites D telles que $D\, D'\, D''\, D'''$ soient parallèles à un même plan ; et qu'il y a 6 faisceaux de plans P parallèles tels que $P\, P'\, P''\, P'''$ soient parallèles à une même droite.*

II

LE SYSTÈME RESTE SEMBLABLE A LUI-MÊME

1. — Nous savons, d'après Chasles, que deux systèmes semblables Σ et Σ' étant donnés, il existe un point O qui, considéré comme appartenant à Σ, est lui-même son homologue dans Σ'. Il suffit de faire tourner Σ autour d'un certain axe OZ passant par ce point, pour rendre Σ homothétique à Σ'. Soit P le plan mené par O perpendiculaire à OZ ; tous les points de Σ qui sont dans ce plan ont leurs homologues dans ce même plan. Le tétraèdre double des

(1) Voir Schœnflies, *Géométrie du mouvement.*

Digitized by Google

deux systèmes a pour sommets le point O, le point à l'infini sur OZ, et les deux points cycliques du plan P.

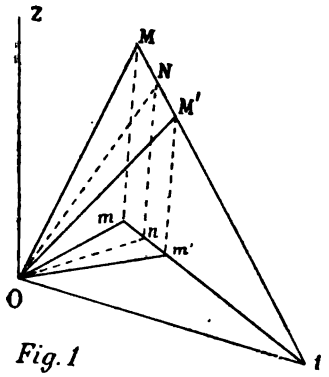


Fig. 1

2. — Soit M' le point de Σ' homologue du point M de Σ, m' et m leurs projections sur le plan P. Les droites OM, OM' faisant des angles égaux avec OZ, le plan bissecteur du dièdre qui a pour arête OZ, et dont les faces contiennent OM et OM', est perpendiculaire aux plans des angles MOM' et mom', et coupe les plans de ces angles suivant des droites ON et On qui sont leurs bissectrices.

Soit t la trace de MM' sur le plan P ; la droite Ot qui est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan bissecteur, est perpendiculaire à ce plan, et en particulier aux droites ON et On. Donc Ot est la bissectrice extérieure des angles MOM' et mOm' ; et le rapport $\frac{tM}{tM'}$ est égal au rapport $\frac{OM}{OM'}$, qui est le rapport des dimensions linéaires homologues de Σ et Σ'. On peut donc énoncer cette propriété remarquable.

Etant donnés deux systèmes semblables Σ et Σ', si l'on joint un point M *de Σ au point homologue* M' *de Σ', et si sur le prolongement de* MM' *on prend un point* t *tel que le rapport* $\frac{tM}{tM'}$ *soit égal au rapport des dimensions linéaires homologues des deux systèmes, tous les points* t *ainsi obtenus sont dans un même plan qui est le plan double des deux systèmes.*

Quant au point double O, on voit qu'il est commun à toutes les sphères qui ont pour diamètres les segments Nt.

Le rapport $\frac{Om}{Om'}$ est égal à $\frac{OM}{OM'}$, et le point m' est l'homologue dans Σ' du point m de Σ ; l'angle $m'Om$ est celui dont il faut faire tourner Σ' autour de OZ pour le rendre homothétique à Σ. Le triangle mOm', déterminé par le point double O et les projections sur P de deux points homologues, a donc une forme invariable, ses angles restant constants, et sa grandeur seule pouvant varier ; il en est de même des triangles mOt ou $m'Ot$. Il en résulte que si M décrit une courbe dans Σ, la trace de MM' sur le plan double P est semblable à la projection de la courbe sur ce plan.

Les considérations qui précèdent permettent de résoudre simplement le problème qui consiste, étant donnés deux triangles homologues ABC, A'B'C' de deux systèmes semblables, à trouver les éléments du tétraèdre double des

Digitized by Google

deux systèmes, c'est-à-dire le point O et l'axe OZ, qu'on pourra appeler le centre et l'axe du déplacement. Il suffira de joindre AA', et de prendre sur le prolongement de cette droite le point t_1 défini par la proportion $\frac{t_1 A}{t_1 A'} = \frac{AB}{A'B'}$; on déterminera d'une manière analogue les points t_2 et t_3 sur BB' et sur CC'. Le plan $t_1\ t_2\ t_3$ est le plan double P. On pourrait déterminer le centre, comme il a été dit plus haut, par l'intersection de 3 sphères, mais on peut l'obtenir par une construction plane. Il suffit de chercher dans le plan P le *pôle double*, ou le *centre de rotation* (1) du triangle $t_1\ t_2\ t_3$, et du triangle semblable abc, projection de ABC sur le plan P. Ce pôle double O est le centre du déplacement, et on a l'axe en menant OZ perpendiculaire à P.

D'après ce que nous venons de voir, l'angle Otm est constant. On peut rattacher ce résultat à cette propriété de la droite MM' d'appartenir à un complexe tétraèdral, ce qui revient à dire que le faisceau des plans menés par MM' et les 4 sommets du tétraèdre double a un rapport anharmonique constant. Ce faisceau est coupé par le plan P suivant les droites tO, tm, et les droites isotropes menées par t. Le rapport anharmonique de ce faisceau de droites étant constant, l'angle Otm est invariable.

3. — Cette propriété rend très aisée l'étude directe du complexe des droites MM'. Soit en effet S le sommet d'un cône du complexe, et s sa projection sur le plan P. L'angle stO étant constant, le lieu du point t est une circonférence passant par les points O et t ; le cône du complexe a pour base sur le plan P cette circonférence ; on voit qu'il passe par le point O, les points cycliques du plan P, et le point à l'infini sur O Z, car il contient la génératrice Ss parallèle à cet axe.

L'angle Oms étant aussi constant, le point m est sur une circonférence passant par O et s, le lieu du point M est donc la cubique gauche, intersection du cylindre qui a cette circonférence pour base, et du cône du complexe, ces deux surfaces ayant une génératrice commune Ss.

Si l'on considère toutes les droites M M' contenues dans un même plan, on voit que le lieu de la trace t de M M' sur le plan P est la trace du plan même où elle est contenue, et comme l'angle Otm est constant, mt enveloppe une parabole. Cette parabole est la projection de la conique du complexe contenue dans le plan considéré. Le lieu de m, ainsi que celui de m' est une droite ; il en est donc de même du lieu de M et du lieu de M'. Ainsi la conique du complexe

(1) Rouché et Comberousse (*Géométrie*) ; J. Petersen (*Problèmes de constructions géométriques*).

Digitized by Google

est une parabole tangente au plan P, et dont la projection sur ce plan a pour foyer le point O. On vérifie par là qu'elle est tangente aux quatre faces du tétraèdre double.

Soit maintenant une droite D du système Σ ; quand le point M parcourt la droite D, le point M′ décrit la droite homologue D′ ; la trace t de M M′ sur le plan P décrit aussi une droite T, et la projection $m\ m'$ de M M′ sur le plan P enveloppe une parabole dont O est le foyer. Cette parabole est le contour apparent sur le plan P du paraboloïde, lieu de la droite M M′. Le plan P coupe ce paraboloïde suivant la droite T, et suivant une autre droite qui joint les traces de D et D′ sur P. Ainsi le paraboloïde est tangent aux 4 faces du tétraèdre double ; c'est une propriété qui s'étend à l'homographie la plus générale. Corrélativement on peut dire aussi, — et il est facile de le démontrer directement, — que le lieu des intersections des plans homologues passant par D et D′ est une quadrique circonscrite au tétraèdre double, et dont, par conséquent, dans le cas actuel le plan P est un plan de section circulaire.

On voit, par ce qui a été dit plus haut, que le point t où la droite qui joint deux points homologues M M′ perce le plan P, ne dépend que de la projection m de M, ou m' de M′ sur ce plan. Si m décrit une droite, t décrit aussi une droite, et mt enveloppe une parabole. On peut donc dire que *les droites qui joignent tous les points M d'un plan parallèle à OZ à leurs homologues rencontrent une même droite du plan P et sont tangentes à un cylindre parabolique.*

Comme l'homographie la plus générale peut se ramener par une transformation homographique à celle qui nous occupe, le résultat précédent peut s'énoncer ainsi.

Etant donné un plan passant par un sommet du tétraèdre double de deux systèmes homographiques, les droites joignant tous les points de ce plan considéré comme appartenant à l'un des systèmes aux points homologues de l'autre système, rencontrent une droite fixe située dans la face opposée, et sont tangentes à un cône qui touche les trois faces du tétraèdre double passant par le sommet considéré.

On énoncerait aisément la propriété corrélative.

Appliquant alors cette propriété au point O de l'homographie actuelle, et la propriété corrélative au plan P, on obtient des propriétés correspondantes que nous retrouvons dans l'étude du déplacement infiniment petit.

Digitized by Google

4. — Déplacement infiniment petit.

Si nous supposons maintenant les systèmes Σ et Σ' infiniment voisins, les propriétés précédentes deviendront aisément des propriétés du déplacement infiniment petit du système Σ. Il en est une surtout qui conduit à presque toutes les autres, et que l'on peut énoncer ainsi :

La tangente à la trajectoire d'un point M *perce le plan double* P *en un point* t *tel que le triangle ayant pour sommet le pôle double* O, *le point* t *et la projection* m *de* M *sur le plan double, est rectangle en* O, *et de forme déterminée.*

L'angle V au point m du triangle omt est donné par une expression très simple : On passe de Σ à Σ' par une rotation $r\varepsilon$ autour de OZ, (ε étant un infiniment petit), et par une homothétie de centre O qui fait varier chaque dimension linéaire dans le rapport de $1+\lambda\varepsilon$ à 1. En considérant la partie de Σ qui appartient au plan double et qui forme ainsi un système plan dont O est le pôle double, on voit que l'on a : $\operatorname{tg} V = \frac{r}{\lambda}$.

Les tangentes aux trajectoires, ou les vitesses des divers points de Σ appartiennent à un complexe tétraèdral. On déduit du déplacement fini, ou l'on peut démontrer directement, au moyen de la propriété énoncée un peu plus haut, que le cône du complexe a le plan double pour plan de section circulaire ; que la conique du complexe est une parabole ; et que le lieu des points dont les vitesses passent par un point donné S, est une cubique, intersection d'un cône, et d'un cylindre de révolution, ayant pour génératrice commune la droite Sx qui projette S sur le plan P. Ce cône et ce cylindre sont orthogonaux le long de la génératrice commune.

La caractéristique d'un plan est l'intersection de ce plan avec sa position infiniment voisine ; c'est aussi la droite du plan dont les vitesses sont contenues dans ce plan : et l'on voit aussi que les caractéristiques des plans et les vitesses des points de Σ forment le même complexe, une droite étant à la fois vitesse et caractéristique.

Si l'on considère une pareille droite comme la caractéristique d'un plan, les vitesses de tous ses points enveloppent dans ce plan la conique du complexe. Considérons maintenant la même droite comme la vitesse d'un certain point S de cette droite, et soit, par cette droite, un plan arbitraire. La caractéristique de ce plan passe par le point S, puisque la vitesse de S est dans le plan. Donc

Digitized by Google

le lieu des caractéristiques des plans passant par la droite est le cône du complexe relatif au point dont la droite est la vitesse.

On peut dire aussi que si, par chaque génératrice d'un cône du complexe, on mène le plan dont cette génératrice est la caractéristique, tous ces plans passent par une même droite, qui est la vitesse du sommet du cône.

Nous venons de voir que lorsqu'une droite D appartient au complexe des vitesses, les vitesses de tous ses points enveloppent la conique du complexe, et les caractéristiques de tous les plans qui passent par cette droite forment le cône de ce complexe. Quand la droite D n'appartient pas au complexe, l'étude du déplacement fini nous conduit à énoncer que les *vitesses de ses points engendrent un paraboloïde tangent aux quatre faces du tétraèdre double, et que les caractéristiques de tous les plans qui la contiennent engendrent un hyperboloïde circonscrit à ce même tétraèdre.*

La démonstration directe de cette dernière propriété conduit à un résultat intéressant.

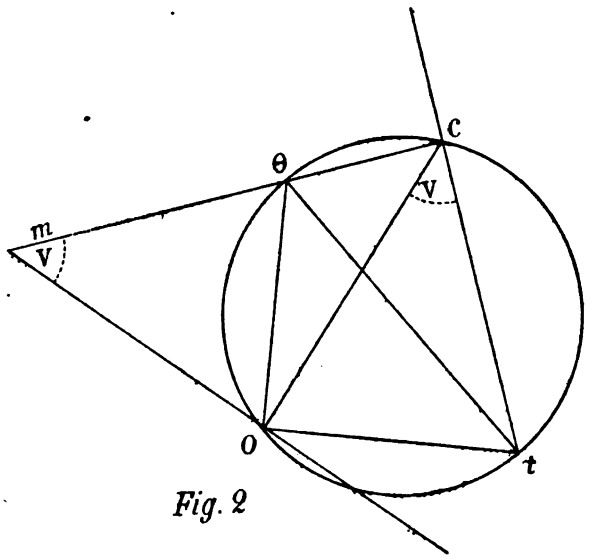


Fig. 2

Soient O le point double et t la trace de la droite D sur le plan double P qui est celui de la figure ; un plan variable passant par la droite D a pour trace une droite tc.

Considérons de nouveau le triangle rectangle de forme déterminée, que nous appellerons *fondamental*, qui a son sommet de l'angle droit au point O, et dont un angle aigu est l'angle V. Si un de ses sommets décrit la droite tc, l'autre, qui est aussi le sommet de l'angle V, décrit une droite perpendiculaire à tc, et c'est la projection du lieu des points du plan dont les vitesses ont leurs traces sur ct, c'est-à-dire la projection de la caractéristique.

Le point c où la caractéristique perce le plan P a sa vitesse dans ce plan et dirigée par conséquent suivant ct ; l'angle Oct est donc égal à V.

Quand le plan variable tourne autour de D, sa trace tourne autour de t, et le lieu du point c est un cercle. C'est l'intersection du lieu des caractéristiques avec le plan double P.

Digitized by Google

La projection $c\,\theta$ de la caractéristique passe par le point θ de ce cercle diamétralement opposé au point t. Donc la caractéristique rencontre la droite parallèle à l'axe OZ qui se projette au point θ; la caractéristique du plan est la projection de cette droite sur ce plan.

La position de θ ne dépend que de celle de t; ces deux points sont les sommets d'un triangle fondamental. *On obtient donc les caractéristiques de tous les plans qui passent par une même droite, et même qui passent par un même point* t *du plan double* P, *en projetant sur ces plans une même droite parallèle à l'axe* OZ.

Cette propriété est l'analogue de celle qui est bien connue dans le déplacement d'un système invariable, et qui permet d'obtenir les caractéristiques d'un faisceau de plans passant par une même droite, en projetant sur ces plans l'adjointe d'un plan perpendiculaire à la droite.

On voit maintenant que le lieu des caractéristiques peut être engendré par l'arête d'un dièdre droit dont les faces passent par deux droites fixes; c'est un hyperboloïde H. Si la droite D est tangente à la trajectoire d'un point; ce point se projette en θ; les deux droites se rencontrent, et le lieu est un cône.

Nous avons vu que sur ce cône le lieu des points dont les vitesses sont les génératrices est une cubique gauche; il en est de même sur l'hyperboloïde H, car soit Mc la génératrice tangente à la trajectoire du point M: ce point M ce projette en un point m qui forme avec le point O et la trace c de cette génératrice un *triangle fondamental*. Le lieu du point m est donc une circonférence passant par O et θ (fig. 2) et orthogonale à la circonférence lieu du point c. Ainsi le point M est sur l'intersection de l'hyperboloïde H et d'un cylindre de révolution, la droite parallèle à OZ qui se projette en θ étant une génératrice commune aux deux surfaces, cette intersection est une cubique gauche.

Considérons la cubique C dont tous les points ont leurs vitesses dirigées vers le point S de cette même courbe; une corde quelconque MN de cette cubique appartient au complexe des vitesses, car les vitesses des points M, N sont dirigées vers MS et NS, et sont ainsi dans le plan de MNS; cette droite MN est la caractéristique de ce plan. Soit donc une droite D rencontrant la cubique au seul point S; tous les plans qui passent par D coupent la cubique en deux autres points M et N, et la droite MN est la caractéristique du plan correspondant MNS. Donc *le lieu de* MN *est l'hyperboloïde* H *relatif à la droite* D; *cet hyperboloïde contient ainsi la cubique* C.

Si la droite D varie de manière à passer toujours par le point S, l'hyperboloïde H varie en passant toujours par la cubique; *donc les hyperboloïdes* H *qui passent par un même point passent aussi par une même cubique gauche.* Si au contraire le point S décrit la droite fixe D. la cubique correspondante reste

Digitized by Google

toujours sur l'hyperboloïde H, et l'on voit que *le lieu des cubiques* C *relatives à tous les points d'une même droite* D *est l'hyperboloïde* H *relatif à cette droite.*

Quand le point S par lequel passent les hyperboloïdes H se trouve dans le plan double P, la cubique commune à ces hyperboloïdes se décompose en un cercle du plan P passant par O et S, et en une droite perpendiculaire à P au point diamétralement opposé à S dans le cercle.

On conclut, par voie de dualité, des propriétés corrélatives pour les paraboloïdes lieux des vitesses de tous les points d'une même droite. En particulier quand la droite varie en restant dans un même plan passant par O, les paraboloïdes ont un plan directeur commun, et sont circonscrits à un même cône. Ce cône, qui a pour sommet le point O, qui est tangent au plan donné, et aux trois faces du tétraèdre double qui passent par O, est celui auquel nous avons vu que sont tangentes les vitesses de tous les points du plan donné.

5. — Voici un nouveau complexe qui se rattache au précédent. C'est celui des droites de Σ qui engendrent des surfaces réglées de même paramètre.

Désignons toujours par λ et r les éléments caractéristiques du déplacement infiniment petit, et rappelons que l'on passe alors de Σ à Σ' par une rotation $r\varepsilon$ autour de OZ, et une homothétie $1+\lambda\varepsilon$ de centre O.

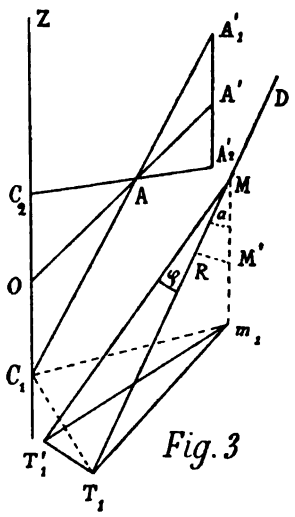


Fig. 3

Soit C_1 un point situé sur l'axe de rotation OZ ; si on substitue au point O le point C_1 comme centre d'homothétie instantané, en gardant le même axe OZ, et les mêmes éléments caractéristiques λ et r, on passe du système Σ à un système semblable Σ'_1 qui est égal à Σ'. Il est facile de voir que Σ'_1 et Σ' se déduisent l'un de l'autre par une simple translation parallèle à OZ. Soit en effet un point A de Σ, l'homothétie du centre O amène A en A', et celle de centre C_1 amène A en A'_1. On voit que $A'A'_1$ est parallèle à OZ et que l'on a

$$\frac{A'A'_1}{OC_1}=\frac{AA'}{OA}=\frac{\lambda\varepsilon.\,OA}{OA}=\lambda\varepsilon\,;\ \text{d'où}\ A'A'_1=OC_1\,\lambda\varepsilon.$$

La rotation commune $r\varepsilon$ autour de OZ laisse les points A' et A'_1 sur une parallèle à O Z, et ne modifie pas leur distance $A_1A'_1 = O\,C_1.\,\lambda\varepsilon$, indépendante de la position du point A.

Désignons par [O] et [C_1] les déplacements infiniment petits relatifs aux centres O et C_1. Soit M un point de Σ, et D la tangente à la trajectoire de ce point dans le déplacement [C_1].

Si nous considérons D comme une droite de Σ, le déplacement [C_1] l'amène dans une position MT'_1 infiniment voisine de sa première position MT_1.

Digitized by Google

L'angle $T_1 M T'_1$ est un élément plan du cône de révolution dont l'axe $M m_1$ est parallèle à OZ, et le plan $T_1 M m_1$ est perpendiculaire à cet élément.

Soit maintenant D' la position où le déplacement [O] amène la droite D de Σ; on obtient D' en menant MM' parallèle à Oz, dirigé dans le sens de O vers C_1, et égal à $O C_1 . \lambda\varepsilon$, puis en menant par M' une parallèle à MT'_1.

Le plan $T_1 M M'$ est tangent à la surface engendrée par D dans le déplacement [O] ; comme il est, ainsi que nous venons de le voir, perpendiculaire au plan $T_1 M T'_1$ qui est parallèle aux deux génératrices infiniment voisines D et D' de cette surface, le point M est sur D le point central.

Pour avoir le paramètre de distribution, menons M'R perpendiculaire à $M T_1$, et désignons par φ l'angle $T_1 M T'_1$; l'expression de ce paramètre est $\frac{M'R}{\varphi}$.

Soit α l'angle $T_1 M m_1$, on a $M' R = M M' \sin \alpha = O C_1 \sin \alpha . \lambda \varepsilon$ Pour avoir φ évaluons de deux manières l'élément $T_1 T'_1$ décrit dans le déplacement $[C_1]$ par la trace de D sur le plan double correspondant. On a d'abord $T_1 T'_1 = M T_1 . \varphi$; comme l'angle $T_1 m_1 T'_1$ est égal à $r \varepsilon$, on a aussi :

$$T_1 T'_1 = m_1 T_1 . r . \varepsilon = M T_1 \sin \alpha . r \varepsilon.$$

Egalant ces 2 valeurs de $T_1 T'_1$, on a $\varphi = \sin \alpha . r \varepsilon$.

On a donc pour valeur du paramètre $\frac{M'R}{\varphi} = \frac{O C_1 \sin \alpha \lambda \varepsilon}{\sin \alpha . r \varepsilon} = OC_1 . \frac{\lambda}{r}$.

Ainsi, *toutes les tangentes aux trajectoires dans le déplacement* $[C_1]$, *deviennent dans le déplacement* [O] *des droites qui engendrent des surfaces réglées de même paramètre* $OC_1 . \frac{\lambda}{r}$. Inversement : *Les droites qui dans le déplacement* [O] *engendrent des surfaces réglées de même paramètre* p, *sont les tangentes aux trajectoires, ou les vitesses dans le déplacement* $[C_1]$, *qui a même axe* OZ, *mêmes éléments caractéristiques* λ *et* r, *mais dont le centre* C *est à une distance de* O *égale à* $\frac{pr}{\lambda}$

Soit maintenant sur OZ (fig. 3) un second point, C_2, situé à la même distance $\frac{pr}{\lambda}$ du point O, mais dans le sens opposé à OC_1; le raisonnement précédent, appliqué aux deux déplacements [O] et $[C_2]$, montre que toute droite tangente à la trajectoire d'un de ses points dans le déplacement $[C_2]$ est une droite qui dans le déplacement [O] engendre une surface réglée de paramètre p. On peut donc dire que, dans le déplacement [O], les droites qui engendrent une surface de paramètre donné appartiennent à deux complexes tétraèdraux. Cependant on peut distinguer les droites qui appartiennent à l'un ou à l'autre de ces deux complexes.

Digitized by Google

On voit en effet que, dans une surface engendrée par une droite D du complexe provenant de $[C_1]$, quand la génératrice D tourne dans le sens de la rotation r, le point central se déplace dans le sens MM_1 opposé à OZ. Il se déplace dans le sens OZ quand la droite provient du complexe qui se rattache à C_2; et si on distingue les paramètres de distribution par un signe, suivant le sens où se déplace le point central, la position du point C_1 ou C_2 est liée au paramètre en grandeur et en signe par l'expression $\frac{pr}{\lambda}$.

De ce que le complexe des droites D qui engendrent des surfaces de même paramètre n'est autre qu'un complexe de vitesses, de ce que le point central n'est autre que le point de contact avec sa trajectoire de la droite considérée comme tangente à la trajectoire d'un de ses points; enfin de ce que le plan tangent à l'infini de la surface réglée sur la génératrice D n'est autre que le plan qui a pour caractéristique cette droite considérée comme vitesse, on conclut immédiatement les propriétés suivantes.

Les points centraux des surfaces engendrées par toutes les droites qui passent par un point donné S, *sont sur un cylindre de révolution dont* OZ *est une génératrice.*

Les droites qui, passant par un même point donné S *engendrent des surfaces réglées de même paramètre forment deux cônes du second degré.*

Sur chacun de ces cônes le lieu des points centraux de ces surfaces est une cubique gauche ; et les plans tangents aux points à l'infini de ces surfaces passent par une même génératrice du cône.

On énoncerait aisément les propriétés relatives au paraboloïde lieu des droites engendrant des surfaces de même paramètre et dont le point central décrit une droite ; et à l'hyperboloïde de ces mêmes droites telles que le plan tangent à l'infini passe par une même droite ; etc...

On voit dans l'étude du complexe des vitesses que le cône du complexe, quand son sommet se trouve dans le plan double, se décompose en ce plan double et un plan perpendiculaire; de plus le lieu des points de contact de ces vitesses avec les trajectoires correspondantes se décompose en un cercle situé dans le plan double, et une droite perpendiculaire à ce plan. Il en résulte une pareille décomposition pour le cône et pour la cubique du complexe des droites qui engendrent des surfaces réglées de paramètre p, quand la distance h du sommet S du cône au plan double est liée au paramètre p par la relation $h = \frac{pr}{\lambda}$.

Digitized by Google

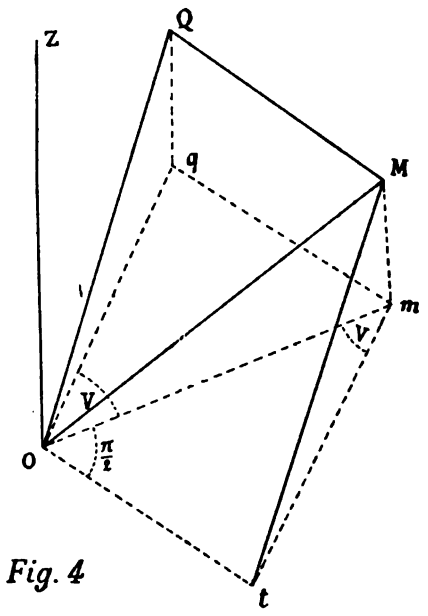


Fig. 4

6. — En se reportant au cas du déplacement fini et à la figure 1, on voit que Mt est proportionnel au déplacement MM′; donc dans le déplacement infiniment petit, le segment Mt (*fig. 4*) compris entre un point M du système et la trace t sur le plan double de la tangente à la trajectoire de ce point, est proportionnel à la vitesse.

Menons du point O un segment OQ égal et parallèle à tM ; à chaque point M du système Σ correspond un point Q, et l'ensemble des points Q forme un nouveau système σ homographique à Σ. Nous avons étudié les relations de ces systèmes dans une homographie plus générale, et nous en avons déduit des propriétés qui s'appliquent naturellement au cas actuel. Mais dans ce dernier cas, la correspondance des systèmes Σ et σ se traduit par une relation géométrique bien simple.

Nous savons que le triangle $m\,o\,t$ formé par la trace de la tangente à la trajectoire de M, par la projection de ce point, et par le point O est rectangle au point O, et que ses angles sont constants. Il en est de même du triangle Omq, (q étant la projection de Q) ; on voit donc qu'on passe d'un point Q de σ au point homologue M de Σ de la manière suivante.

La projection m de M sur le plan double s'obtient en faisant tourner dans ce plan la projection Oq de OQ, de l'angle V, et en la multipliant par cos V ou $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}}$; on porte ensuite en m une coordonnée mM égale et parallèle à Qq.

On peut dire aussi que l'on imprimera à σ une rotation V autour de OZ, en même temps qu'une homothétie de centre O, et telle que le rapport des dimensions linéaires après et avant la rotation soit $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}}$; puis comme après cette opération toutes les coordonnées parallèles à OZ, sont réduites, tandis qu'elles ne doivent par l'être, on les dilatera dans le rapport $\frac{\sqrt{\lambda^2+r^2}}{\lambda}$.

On voit ainsi qu'une sphère du système σ a pour homologue dans Σ un ellipsoïde de révolution allongé dans la direction OZ ; c'est le lieu des points de Σ dont la vitesse a une grandeur donnée.

Par les considérations qui précèdent il serait aisé de démontrer directement les propriétés que l'on peut aussi déduire de celles qui ont été exposées pour

Digitized by Google

deux systèmes homographiques Σ et Σ', par exemple au sujet des points d'un plan qui ont la même vitesse, ou dont les vitesses font un même angle avec ce plan, ou encore du point d'un plan ou d'une droite dont la vitesse est perpendiculaire à ce plan ou à cette droite ; etc...

7. — Soit $\Sigma\Pi$ le système plan formé par les points de Σ qui sont dans un plan Π ; après un déplacement infiniment petit, le plan Π prend une position infiniment voisine Π' qui contient le système plan $(\Sigma\Pi)'$. Ramenons $(\Sigma\Pi)'$ dans le plan Π en faisant tourner Π' autour de la caractéristique ; les deux systèmes semblables étant situés dans le même plan ont dans ce plan un pôle double F. On passe donc, en définitive, de $\Sigma\Pi$ à $(\Sigma\Pi)'$, en faisant tourner $\Sigma\Pi$ dans son plan autour de F, et en multipliant en même temps ses dimensions linéaires par $1+\lambda\varepsilon$; puis en faisant tourner Π autour de sa caractéristique pour l'amener dans la position Π'. Il résulte de là que le déplacement d'un point quelconque du plan Π est la résultante de deux déplacements : d'abord celui qui est obtenu dans ce plan par la rotation accompagnée d'homothétie, puis un déplacement perpendiculaire au plan.

Le déplacement dans le plan est tel qu'il fait, pour tous les points du plan, un angle constant avec la droite qui joint chacun de ces points au point F. Le déplacement perpendiculaire au plan est proportionnel à la distance du point considéré à la caractéristique. Le déplacement du point F dans le plan étant nul, le déplacement total de ce point est perpendiculaire au plan ; c'est le foyer du plan. Les points de la caractéristique, au contraire, ont leurs vitesses situées dans le plan Π, et il résulte des propriétés précédentes que ces vitesses enveloppent une parabole tangente à la caractéristique, et ayant pour foyer le foyer même F du plan.

On déduit aussi très aisément de ces propriétés le lieu des points de Π dont les vitesses font un angle donné avec ce plan.

Soit un point M de ce lieu ; il existe un rapport constant entre les deux composantes de son déplacement infiniment petit : celle qui est située dans le plan Π, et celle qui lui est perpendiculaire. Ces composantes étant respectivement proportionnelles aux distances du point M au foyer F et à la caractéristique du plan, on voit qu'il existe un rapport constant entre ces deux distances, et qu'ainsi *le lieu du point* M *est une conique qui a pour foyer le foyer même du plan, et pour directrice la caractéristique* (1).

La composante du déplacement infiniment petit d'un point M de Π, située

(1) M. Durande a démontré cette propriété dans le cas du déplacement d'un système invariable.

Digitized by Google

dans ce plan, est la projection orthogonale du déplacement total de ce point ; et l'on voit que les projections des vitesses des points M du plan Π sur ce plan jouissent des propriétés des vitesses d'un système plan qui se mouvrait dans le plan Π en restant semblable à lui-même.

Soit dans le plan Π un cercle C passant par le point F, et M un point quelconque de ce cercle. La projection sur le plan Π de la vitesse de ce point faisant avec FM un angle constant, cette projection passe par un point fixe φ du cercle ; par conséquent la vitesse elle-même rencontre la droite D menée normalement au plan par le point φ.

Considérons le plan mené par le point M et la normale D, la vitesse du point M est dans ce plan, et le point M appartient ainsi à la caractéristique de ce plan. Le cercle C est donc l'intersection du plan Π avec l'hyperboloïde lieu des caractéristiques des plans passant par la droite D. Le point φ', de ce cercle, diamétralement opposé à φ, est le point où la génératrice de l'hyperboloïde parallèle à OZ perce le plan Π.

Si la normale D appartient au complexe des vitesses, nous savons que l'hyperboloïde se réduit à un cône qui a pour sommet le point S dont la vitesse est suivant D. Ce point S est sur la droite OF, lieu des points dont les vitesses sont perpendiculaires au plan Π. Quand le point S décrit cette droite sa projection φ décrit une droite du plan Π, et le cercle C correspondant reste tangent en F à une droite fixe. Ainsi les cônes S relatifs aux points S d'une droite OF, sont tangents entre eux suivant cette génératrice OF.

Les vitesses des points du cercle C forment une surface réglée du quatrième ordre. En effet, le plan Π coupe cette surface suivant le cercle C, et suivant les deux droites qui sont les vitesses des deux points d'intersection du cercle C avec la caractéristique du plan Π. De même, le plan double P coupe la surface suivant une conique, qui est une ellipse semblable à la projection orthogonale du cercle C sur plan P, et suivant deux droites qui sont les vitesses des deux points d'intersection du cercle C avec le plan P.

La droite D est une génératrice de la surface, et par chaque point S de cette droite passent trois autres génératrices. En effet, la cubique, lieu des points dont les vitesses sont dirigées vers S, perce le plan Π en trois points qui sont sur le cercle C ; et les vitesses de ces trois points sont trois génératrices de la surface qui rencontrent D au même point S.

Digitized by Google

8. — Mouvement indirect.

Nous avons jusqu'ici envisagé le déplacement du système Σ dans l'espace fixe ; considérons maintenant cet espace fixe comme un nouveau système Σ_1. Le mouvement que nous avons étudié est celui auquel assiste un observateur faisant partie du système Σ_1, Soit maintenant un observateur faisant partie du système Σ, participant, sans en avoir conscience, au mouvement de ce système et à la variation de ses dimensions. Le système Σ_1 lui paraîtra se mouvoir et en même temps varier de grandeur, tout en restant semblable à lui-même.

Si de la position initiale à la position actuelle le système Σ a eu ses dimensions linéaires multipliées par le facteur $1+\lambda\varepsilon$, l'observateur attaché à Σ croira voir les dimensions linéaires de Σ_1 divisées par $1+\lambda\varepsilon$. Le déplacement de Σ_1 auquel assiste l'observateur attaché à Σ est *le mouvement indirect* (1).

Pour passer de la position Σ à une autre position Σ', le système a été soumis à une rotation autour d'un axe OZ, et à une homothétie de centre O. Dans le plan P mené par O perpendiculairement à OZ, traçons deux axes rectangulaires OX, OY ; nous avons ainsi formé le trièdre trirectangle O,XYZ.

Nous pouvons considérer ce trièdre comme faisant partie du système Σ_1 ; soit alors M un point quelconque de Σ, on aura le point correspondant de Σ', (2e position de Σ dans Σ_1), en faisant tourner la droite OM autour de OZ de l'angle fini $r\varepsilon$, et en multipliant ensuite cette ligne par $1+\lambda\varepsilon$ (*fig. 5*).

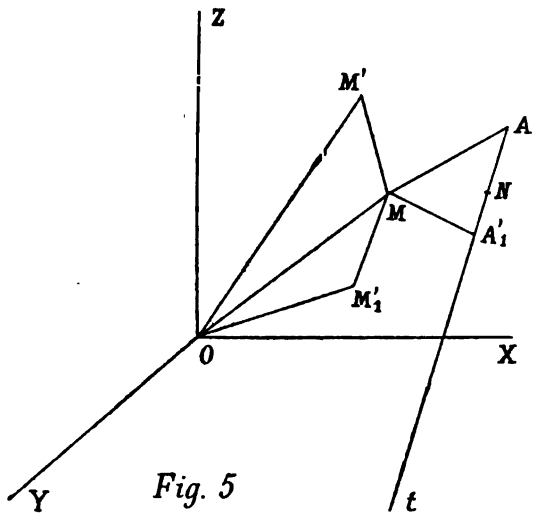


Fig. 5

On peut aussi considérer le trièdre comme faisant partie de Σ supposé immobile ; dans ce cas le mouvement indirect fera passer le point M de Σ_1 à la position M'_1 dans Σ'_1, en faisant tourner la droite OM dans le sens opposé au précédent de l'angle fini $r\varepsilon$, et en divisant ensuite cette ligne par $1+\lambda\varepsilon$.

L'angle aigu des deux droites MM'_1 et MM' est en général du même ordre que ε ; si donc on considère un déplacement infini-

(1) Le mouvement indirect, dans le cas d'un système invariable, a été considéré par Chasles, Aronhold et surtout Schœnflies dans sa *Géométrie du Mouvement*.

Digitized by Google

ment petit, la tangente à la trajectoire de M est la même dans le mouvement direct et dans le mouvement indirect.

Comme application du déplacement indirect, proposons-nous de trouver les points M de Σ qui dans les deux positions Σ et Σ' non infiniment voisines sont à une même distance d'un point A de Σ_1. Dans le mouvement indirect, le trièdre O, XYZ étant considéré comme faisant partie de Σ, le point A en tant que point de Σ_1 vient en A'_1. Les dimensions de Σ_1 étant, dans la nouvelle position Σ'_1, divisées par $1+\lambda\varepsilon$, on a $\frac{MA}{MA'_1} = 1+\lambda\varepsilon$. Le lieu du point M est donc la sphère qui a pour diamètre Nt, N et t étant les points qui partagent AA'_1 dans le rapport $1+\lambda\varepsilon$; nous savons d'ailleurs que t est la trace de AA'_1 sur le plan XOY. La sphère passe aussi par le point O.

Les points M et M′ étant à la même distance du point A, le plan perpendiculaire à MM′ en son milieu passe par A. Dans le cas du déplacement infiniment petit, ce plan est normal à la trajectoire du point M qui est ainsi son foyer ; et l'on voit alors que *le lieu des foyers des plans qui passent par un point donné* A *est une sphère* Φ *qui passe par l'origine, et qui a pour diamètre la partie de la tangente à la trajectoire du point* A *comprise entre* A *et la trace de cette tangente sur le plan double* P *ou* XOY.

Le lieu des foyers des plans qui passent par une même droite est le cercle commun aux sphères Φ_A et Φ_B relatives à deux points A et B de la droite ; il en résulte que *les sphères* Φ *relatives à tous les points d'une droite passent par un même cercle.* On voit aussi que *toutes les sphères* Φ *relatives à tous les points d'un plan passent par deux points fixes : l'origine* O *et le foyer du plan.*

On sait que sur chaque droite du système il y a un point dont la trajectoire est normale à la droite, et qu'on peut appeler le foyer de la droite ; on peut aisément déduire de ce qui précède le lieu des foyers des droites qui passent par un point donné A. C'est la sphère Φ relative à ce point. Soit en effet une droite D passant par A, et F son foyer ; on peut mener par D un plan perpendiculaire à la trajectoire de F, ce point F sera le foyer de ce plan, et appartiendra à la sphère Φ.

Soit à trouver maintenant le lieu des points M de Σ qui dans trois positions successives M, M′, M″, appartenant respectivement à $\Sigma, \Sigma' \Sigma''$, sont à une même distance d'un point A de Σ_1. En considérant le mouvement indirect de Σ_1, on voit que les distances du point M de Σ aux points A, A'_1, A''_1, des systèmes $\Sigma^1, \Sigma'_1 \Sigma''_1$, sont entre elles dans des rapports connus ; et le lieu du point M est alors une circonférence.

Enfin, par un raisonnement analogue, on voit qu'il n'y a que deux points de Σ qui dans quatre positions différentes soient à une même distance d'un point

Digitized by Google

donné A de Σ_1. En passant aux déplacements infiniment petits, on peut énoncer :

Dans le déplacement continu de Σ, *le lieu des points* M *tels que l'axe de courbure de leur trajectoire passe par un point donné* A *est une circonférence ; il y a deux points de* Σ *tels que la sphère osculatrice de leur trajectoire ait pour centre un point donné* A.

Quand dans le déplacement direct de Σ dans Σ_1, un point M de Σ se trouve dans trois positions successives sur une même droite D de Σ_1, dans le déplacement indirect, la droite D passe dans ses trois positions par le même point M de Σ.

Comme le mouvement indirect est aussi général que le mouvement direct, on conclut de ce qui précède, et de ce qui a été démontré pour le déplacement de Σ, la propriété suivante :

Il existe dans un système, qui se déplace en restant semblable à lui-même, une infinité de droites formant une surface réglée, qui jouissent de cette propriété que chacune d'elles, dans trois positions successives du système, passe par un même point ; l'ensemble de ces points forme une cubique gauche.

On transformerait de même les propriétés relatives aux points qui restent dans un même plan, pour 4, 5, 6 positions successives du système ; et on en déduirait des propriétés de plans qui, dans 4, 5, 6 positions du système, passent par un même point.

En particulier, on peut énoncer la propriété suivante :

Il y a dans Σ *une infinite de plans* Π, *tangents à une même surface, et qui dans quatre positions successives passent par un même point* A. *Le lieu de ces points* A *est une surface du 3e degré.*

9. — Soient 3 systèmes semblables $\Sigma\,\Sigma'\,\Sigma''$, et les pôles doubles O de Σ et Σ', O′ de Σ' et Σ'', O″ de Σ'' et Σ ; soient aussi Π, Π', Π'', trois plans homologues dans les trois systèmes.

Menons par O un plan passant par l'intersection de Π et Π', par O′ un plan passant par l'intersection de Π' et Π'', par O″ un plan passant par l'intersection de Π'' et Π. Ces trois plans passent par une même droite D, qui est le lieu des points dont les distances aux faces du trièdre $\Pi\,\Pi'\,\Pi''$ sont entre elles comme les dimensions linéaires homologues des trois systèmes. Si Π appartient à l'ensemble des plans qui dans leurs trois positions successives restent parallèles à une même droite, le trièdre devient un prisme, dont les arêtes sont parallèles à D. Menons par D les plans π, π', π'' respectivement parallèles aux plans Π, Π', Π'' ; le rapport des distances de O à π et π' est égal au rapport de

Digitized by Google

ses distances à Π et Π', et π' est ainsi l'homologue de π ; de même π'' est l'homologue de π'.

On voit ainsi qu'il existe une infinité de plans π qui dans leurs trois positions successives passent par une même droite D. Le mouvement indirect prouve aussitôt qu'il existe une infinité de droites D formant une surface dont les génératrices sont, comme on l'a vu (I. § 4), parallèles à un cône du troisième ordre, et qui dans leurs trois positions successives restent dans un même plan.

Soient maintenant quatre systèmes semblables $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$; en les combinant deux à deux, on a six pôles doubles. Un plan Π de Σ, dans ses quatre positions forme, en général, un tétraèdre. Les six plans passent respectivement par les six arêtes de ce tétraèdre, et les pôles relatifs aux deux systèmes auxquels appartiennent les plans qui par leurs intersections donnent les arêtes, passent par un même point A, qui est celui dont les distances aux quatre faces du tétraèdre sont proportionnelles aux dimensions linéaires homologues des systèmes correspondants.

Par ce point, menons des plans respectivement parallèles aux faces du tétraèdre, ces quatre plans π, π', π'', π''' sont homologues et passent par un même point A. Nous avons dit, à la fin du paragraphe précédent, que le lieu de ces points A est une surface du 3e degré. On voit ainsi que cette surface peut être définie comme le lieu des points communs à six plans variables passant par six points fixes.

Détermination du pôle double et de l'axe instantané, connaissant les tangentes aux trajectoires de trois points du Système.

Soient D_1, D_2, D_3, trois droites passant par les trois points A_1, A_2, A_3, du système Σ. Si le système doit rester invariable, il n'existe pas, en général, un mouvement pour lequel ces trois droites sont les tangentes aux trajectoires de ces trois points ; mais si le système n'est assujetti qu'à rester semblable à lui-même, le problème est toujours possible, et il est même, dans certains cas, indéterminé.

Prenons, en effet, sur les droites D_1 et D_2, deux points A'_1 et A'_2, arbitraires, mais infiniment voisins de A_1 et A_2 ; le triangle $A'_1 A'_2 A'_3$ est déterminé en grandeur ; le sommet A'_3, en tournant autour de $A'_1 A'_2$, décrit un cercle. Fixons le point A'_1, et faisons décrire à A'_2 la droite D_2 ; à chaque position de A'_2 le sommet A'_3 décrira en tournant un cercle analogue au précédent L'ensemble de

Digitized by Google

ces cercles est une surface du quatrième ordre qui rencontre la droite D_3 en un point infiniment voisin de A_3. Le triangle $A'_1 A'_2 A'_3$, position infiniment voisine de $A_1 A_2 A_3$, est ainsi fixé.

Nous verrons bientôt que le problème est indéterminé quand les trois droites D_1, D_2, D_3, rencontrent une même droite perpendiculaire au plan des trois points A_1. A_2, A_3 ; et que, de plus, le pied de cette perpendiculaire se trouve sur le cercle circonscrit au triangle de ces trois points. Nous écarterons d'abord ce cas.

1re Méthode. — Le triangle qui a pour sommets, dans le plan double P, le pôle double O, la trace A'_1 de la tangente en un point A_1, et la projection a_1 de ce point sur le plan P, a une forme invariable. La sphère Φ_1 relative au point A_1 a pour section dans le plan P le cercle circonscrit au triangle $A'_1 a_1 O$. (Fig. 6).

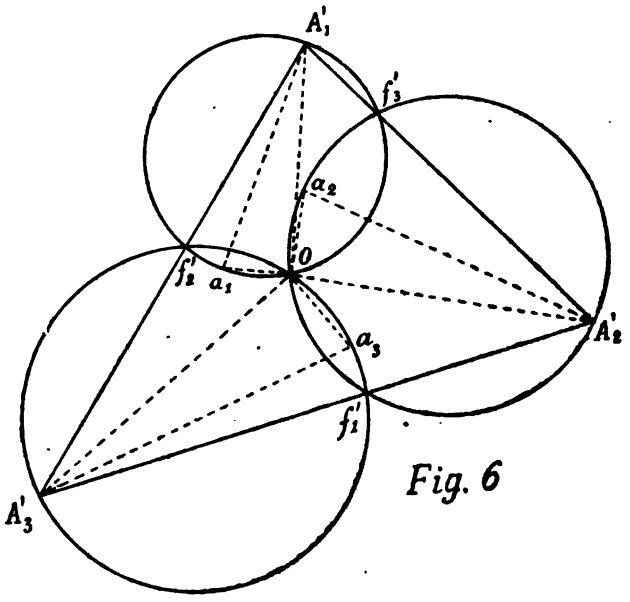


Fig. 6

De même la sphère Φ_2 relative au point A'_2 est coupée par le plan P suivant le cercle circonscrit au triangle correspondant $A'_2 a_2 O$, et il est facile de voir que, les deux triangles étant semblables, la droite $A'_1 A'_2$ passe par le point d'intersection f'_3 des deux cercles. Enfin le point A_3 donne lieu à une sphère Φ_3, à un triangle $A'_3 a_3 O$, et à un troisième cercle. En définitive, les trois cercles ont d'abord le point O commun, puis les points $f'_1 f'_2 f'_3$ communs aux cercles pris deux à deux, et situés respectivement sur les côtés du triangle $A'_1 A'_2 A'_3$. Remarquons même que, de ce que les cercles passent respectivement par les sommets du triangle, et de ce que ces cercles se coupent deux à deux sur les côtés de ce triangle, il résulte qu'ils passent tous les trois par un même point O.

Le problème peut donc se ramener à cet énoncé : *Construire trois sphères* $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$, *passant par les trois points donnés* A_1, A_2, A_3 *ayant leurs centres sur les trois tangentes données* $D_1. D_2, D_3$, *et telles que les côtés du triangle formé par les points* A'_1, A'_2, A'_3 *diamétralement opposés aux précédents, rencontrent respectivement les cercles d'intersection de ces sphères deux à deux.*

Digitized by Google

Le plan de ce triangle est alors le plan double P, *et le point* O *commun aux trois cercles d'intersection de ce plan avec les trois sphères est le pôle double.*

La solution de ce problème de géométrie résulte des propriétés suivantes :

1°. — Soient deux points A'_1 et A'_2 appartenant respectivement à deux sphères Φ_1 et Φ_2, qui se coupent suivant un cercle réel Γ_3, et A_1, A_2, les points de ces sphères diamétralement opposés à A'_1 et A'_2 ; si la droite $A'_1 A'_2$ rencontre Γ_3, il en est de même de la droite $A_1 A_2$.

Soit, en effet, f'_3 le point où $A'_1 A'_2$ rencontre Γ_3 ; par ce point f'_3 menons perpendiculairement à $A'_1 A'_2$ un plan qui coupe les deux sphères suivant deux cercles γ'_1 et γ'_2. Les points diamétralement opposés à A'_1 et A'_2 dans les sphères, sont les points A_1 et A_2 diamétralement opposés à f'_3 dans les deux cercles, et il est facile de voir que la droite qui joint les points A_1 et A_2 passe par le second point d'intersection f_3 de γ'_1 et γ'_2, et qu'elle est perpendiculaire à la droite $f'_3 f_3$.

Ainsi $f'_3 f_3$ est perpendiculaire à $A_1 A_2$; on verrait, en partant de ces deux derniers points, que $f'_3 f_3$ est aussi perpendiculaire à $A'_1 A'_2$. Les deux droites $A_1 A_2$ et $A'_1 A'_2$ sont donc perpendiculaires entre elles, et ont $f'_3 f_3$ pour perpendiculaire commune.

2°. — Considérons maintenant trois sphères Φ_1. Φ_2, Φ_3, ayant deux points communs réels, O et F ; désignons par γ_3 le cercle commun aux deux sphères Φ_1 et Φ_2 ; par γ_1 le cercle commun à Φ_2 et Φ_3 ; par γ_2 le cercle commun à Φ_3 et Φ_1.

Soit $A'_1 A'_2 A'_3$ un triangle tel que les côtés $A'_1 A'_2$, $A'_2 A'_3$, $A'_3 A'_1$ rencontrent respectivement les cercles γ_3, γ_1, γ_2 en des points f'_3, f'_1, f'_2 (fig. 6). Le plan de ce triangle coupe les trois sphères suivant 3 cercles qui passent respectivement par les trois sommets du triangle, et qui se rencontrent deux à deux sur les côtés de ce même triangle. On sait que de tels cercles ont un point commun, et le plan $A'_1 A'_2 A'_3$ passe par l'un des points communs aux trois sphères ; soit O ce point commun.

Si A_1, A_2, A_3 sont dans chaque sphère les points diamétralement opposés à A'_1, A'_2, A'_3, la droite $A_1 A_2$ rencontre le cercle γ_3, (1re propriété) ; de même la droite $A_2 A_3$ rencontre γ_1, et $A_3 A_1$ rencontre γ_2 ; par suite, le plan $A_1 A_2 A_3$ passe par l'autre point d'intersection F des trois sphères.

Tous les triangles situés dans le plan $A'_1 A'_2 A'_3$, et tels que les sphères se rencontrent deux à deux sur les trois côtés, sont semblables au triangle $A'_1 A'_2 A'_3$, et au triangle des centres des sections des trois sphères par ce plan. Les points diamétralement opposés, dans les sphères, $A'_1 A'_2 A'_3$, se projettent sur ce plan aux point $a'_1 a'_2 a'_3$ (fig. 6) diamétralement opposés à $A'_1 A'_2 A'_3$ dans les 3 cercles, formant ainsi un triangle semblable à $A'_1 A'_2 A'_3$, et ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ce triangle. Mais, si le triangle $A'_1 A'_2 A'_3$ a ses

Digitized by Google

côtés parallèles à ceux du triangle des centres des trois sections, les points a_1, a_2, a_3 se confondent au point O, et le triangle $A_1 A_2 A_3$ se réduit à une droite passant par O, et perpendiculaire au plan $A'_1 A'_2 A'_3$.

Inversement, si on considère dans le plan $A'_1 A'_2 A'_3$ une droite passant par O, et si l'on prend sur les trois sphères les points diamétralement opposés aux points d'intersection (autres que O), de la droite avec les cercles de section, le triangle ainsi formé est situé dans un plan passant par O et perpendiculaire à la droite. Ses côtés, d'ailleurs, rencontrent respectivement les cercles communs aux trois sphères.

3°. — Des trois cercles qui se coupent au point O (*fig. 6*), deux quelconques peuvent être considérés comme obtenus du troisième par une rotation autour du point O, suivie d'une homothétie ayant O pour centre. Les sommets du triangle $A'_1 A'_2 A'_3$ sont homologues entre eux ; et il en est de même du triangle $a_1 a_2 a_3$. Les angles $O A'_1 a_1$, $O A'_2 a_2$, $O A'_3 a_3$ sont donc égaux entre eux.

Les droites $A'_1 a_1$, $A'_2 a_2$, $A'_3 a_3$ sont d'ailleurs les projections sur le plan $A'_1 A'_2 A'_3$ des diamètres des sphères Φ_1, Φ_2, Φ_3, qui passent par les points A'_1, A'_2, A'_3.

Ainsi l'on peut dire, que : *quand les trois côtés d'un triangle passent par des points communs aux trois sphères prises deux à deux, les droites qui joignent les sommets du triangle au point commun aux trois sphères qui est dans son plan, forment des angles égaux avec les projections sur ce plan des diamètres des sphères qui passent par les sommets du triangle.*

La solution du problème posé ressort sans peine des propriétés qui précèdent. En effet, puisque les traces A'_1, A'_2, A'_3, des droites D_1, D_2, D_3 sur le plan double sont les sommets d'un triangle situés respectivement sur les cercles qui sont les sections par ce plan des sphères Φ_1, Φ_2, Φ_3 relatives aux points donnés A_1, A_2, A_3, et que les côtés de ce triangle passent par les points d'intersection de ces cercles deux à deux, le triangle $A_1 A_2 A_3$, dont les sommets sont, dans les sphères Φ, diamétralement opposés aux points A', est lui aussi tel que son plan passe par un des deux points communs aux trois sphères. Ce point F jouit de cette propriété que les droites qui le joignent aux points A_1, A_2, A_3 font des angles égaux avec les projections d_1, d_2, d_3 des droites D_1, D_2, D_3 sur ce plan. Si donc on décrit un cercle passant par A_1, A_2, et le point d'intersection des droites d_1 et d_2, ainsi que les deux autres cercles analogues, le point d'intersection commun à ces 3 cercles est le point F commun aux trois sphères.

Le point F étant ainsi connu, chaque sphère Φ passe par le point A correspondant, a son centre sur la droite D correspondante, et passe par F ; elle est donc déterminée. L'autre point commun O aux 3 sphères Φ est le pôle double,

Digitized by Google

et le plan des points diamétralement opposés aux points A est le plan double.

Cette solution aurait été obtenue plus rapidement si, au lieu de réduire la question à un problème de pure géométrie, nous nous étions attachés davantage aux propriétés démontrées pour le déplacement infiniment petit. Ainsi, nous savons que la sphère Φ relative à un point A passe par le foyer de tout plan qui contient le point A. D'autre part, nous savons aussi que la droite qui joint le foyer d'un plan à un point de ce plan, fait un angle constant avec la projection de la vitesse de ce point sur le plan. Nous sommes amenés par là à la construction précédente pour le point F qui est le foyer du plan $A_1 A_2 A_3$, et pour les sphères Φ qui conduisent au pôle double et au plan double. Et de la solution ainsi obtenue on déduirait sans peine les propriétés géométriques 1°, 2° et 3°, que nous avons démontrées directement.

Des considérations du même genre, développant certains résultats acquis dans l'étude du déplacement infiniment petit, conduisent à d'autres propriétés du système de trois sphères.

Considérons, par exemple, un déplacement infiniment petit dont on connaît le pôle double et le plan double, mais dont le paramètre $\frac{r}{\lambda}$ reste indéterminé. Soient trois sphères passant par le point O, et se coupant en un autre point, F. Ce sont des sphères Φ, mais les points A_1, A_2, A_3 auxquels elles correspondent, et les points diamétralement opposés A'_1, A'_2, A'_3, varient, suivant le paramètre $\frac{r}{\lambda}$. Ces trois derniers points forment un triangle dont les côtés passent toujours par les points d'intersection deux à deux des trois cercles suivant lesquels le plan double coupe les sphères ; quant au triangle $A_1 A_2 A_3$, on peut voir aisément que son plan passe par une droite fixe.

En effet, le point F est le foyer de ce plan ; or la rotation autour de l'axe instantané OZ fait décrire à F un élément de ligne perpendiculaire au plan ZOF, et l'homothétie de centre O lui fait décrire un élément de la droite OF. Ces deux éléments en se composant donnent un élément de la trajectoire de F, lequel est ainsi toujours contenu dans le plan tangent au cône de révolution qui a OZ pour axe, et OF pour génératrice.

Le plan $A_1 A_2 A_3$, étant perpendiculaire à la vitesse de son foyer F, passe, dans toutes ses positions, par la perpendiculaire menée par F au plan tangent. Nous allons donner dans le paragraphe suivant la démonstration directe de la quatrième propriété des sphères qui résulte de la remarque précédente.

4°. — Nous avons observé que, si l'on considère une droite D′ passant par un des points d'intersection O des trois sphères, les points diamétralement opposés aux trois autres points d'intersection de D′ avec les trois sphères forment un triangle dont le plan passe par O ; mais si la droite D′ est perpen-

Digitized by Google

diculaire à la sécante commune OF des trois sphères, on voit, en menant par O un plan perpendiculaire à D′, que le triangle précédent se réduit à une droite D, perpendiculaire à D′ et à OF, et passant par le point F.

Ceci rappelé, la propriété à démontrer s'énonce ainsi.

Soient trois sphères Φ_1, Φ_2, Φ_3, *ayant deux points réels communs* O *et* F, *et un plan fixe* P, *passant par le point* O, *et coupant les sphères suivant trois cercles ayant* O *pour point commun. On considère les triangles* $A'_1 A'_2 A'_3$ *qui ont respectivement leurs sommets sur les trois cercles, et dont les côtés passent par les intersections de ces cercles deux à deux. A chaque triangle* $A'_1 A'_2 A'_3$ *correspond un triangle* $A_1 A_2 A_3$, *dont les sommets sont diamétralement opposés, dans les sphères, aux points* A'_1, A'_2, A'_3 ; *je dis que le plan du triangle* $A_1 A_2 A_3$ *passe par une droite fixe.*

Remarquons, pour cela, que, tandis que les points A'_1 et A'_2 parcourent dans le plan P leurs cercles respectifs, les points A_1 et A_2 parcourent sur les sphères Φ_1 et Φ_2 deux cercles parallèles C_1 et C_2 avec des vitesses angulaires égales et de même sens. La droite A_1, A_2 engendre donc un hyperboloïde H_3, et comme elle rencontre toujours le cercle d'intersection γ_3 des sphères Φ_1 et Φ_2, ce cercle γ_3 appartient aussi à l'hyperboloïde. C'est une 2e section circulaire de H_3 lequel contient ainsi, en particulier, le point F commun aux trois sphères. De même, les points A_2 et A_3 décrivent les cercles C_2 et C_3, et la droite $A_2 A_3$ engendre un hyperboloïde H_1 passant par le point F.

Considérons maintenant la droite D′, intersection du plan P avec un plan mené par le point O perpendiculairement à OF. Nous savons qu'à cette droite correspond une droite D passant par F, perpendiculaire à FO et à D′, et qui contient les points diamétralement opposés aux points d'intersection, (autres que O), de D′ avec les trois cercles du plan P. Cette droite D rencontre donc les trois cercles C_1, C_2, C_3.

Elle a ainsi trois points communs avec H_3 ; ce sont : le point F, et les points d'intersection avec C_1 et C_2 ; elle appartient donc à H_3.

Elle est d'ailleurs d'un autre système que $A_1 A_2$; car, si elle était du même système, elle correspondrait à une position particulière de $A'_1 A'_2$, ce qui n'est pas ; donc toutes les droites $A'_1 A'_2$ rencontrent D.

De même D est une génératrice de H_1, d'un autre système que $A_2 A_3$; et les droites $A_2 A_3$ rencontrent D.

Par suite, le plan $A_1 A_2 A_3$ passe constamment par la droite D.

Digitized by Google

Réciprocité entre le plan double P et un plan quelconque Π du système Σ.

Soit AA′ la tangente à la trajectoire d'un point A d'un plan Π, A′ étant la trace de cette droite sur le plan double P. La droite OA′, qui joint le point double O au point A′, fait dans le plan P un angle constant avec la projection A′ a' de la droite AA′ sur ce plan. Nous avons vu aussi que la droite qui, dans le plan Π, joint le foyer F de ce plan au point A, fait un angle constant avec la projection Aa de AA′ sur ce plan.

Si donc on conçoit un déplacement infiniment petit ayant Π pour plan double, et F pour pôle double, la droite A A′ représente la tangente à la trajectoire du point A′, et le point O le foyer du plan P. Les caractéristiques des plans Π et P dans les deux déplacements sont les intersections de ces plans par un troisième plan perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la fois aux deux plans.

Soit une droite D perpendiculaire au plan Π, l'hyperboloïde H, lieu des caractéristiques des plans qui passent par cette droite, a pour plans de sections circulaires le plan Π et le plan double P du déplacement. Cet hyperboloïde a aussi une génératrice D′ perpendiculaire à P, et l'on voit sans peine que dans le déplacement qui a F pour pôle double et Π pour plan double, le même hyperboloïde H est le lieu des caractéristiques des plans qui passent par D′.

Pour achever de définir un déplacement élémentaire, (quant au premier ordre), il faut connaître le rapport $\frac{r}{\lambda}$; nous allons trouver la relation entre les paramètres $\frac{r}{\lambda}$ et $\frac{r_1}{\lambda_1}$ des deux déplacements réciproques que nous venons de remarquer.

La rotation autour de OZ étant r, la rotation qui en résulte, pour le même déplacement, autour de la perpendiculaire menée du foyer F au plan Π, est $r \cos \alpha$, α étant l'angle des deux plans. Si nous désignons par A l'angle formé dans le plan Π par FA avec la projection de la vitesse de A sur ce plan, on a $\operatorname{tg} A = \frac{r \cos \alpha}{\lambda}$.

De même, en désignant par A′ l'angle formé dans le plan P par la droite OA′, et la projection de AA′ sur ce plan, la considération du second déplacement donne $\operatorname{tg} A' = \frac{r_1 \cos \alpha}{\lambda_1}$.

Mais, dans le premier déplacement, le triangle fondamental A′ a' O formé

Digitized by Google

par le point A', la projection de a' de A sur le plan double, et le pôle double O, montre que l'on a $\operatorname{tg} A' a' O = \frac{r}{\lambda}$; donc, on a $\operatorname{tg} A' = -\frac{\lambda}{r}$. En égalant les valeurs de tg A', on arrive à la relation : $\frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\lambda_1}{r_1} = -\cos \alpha$.

Il faut mettre à part le cas où le plan Π est perpendiculaire au plan P. Les tangentes aux trajectoires des divers points de Π passent par une même droite du plan P, et sont tangentes à un cylindre parabolique dont la section droite, dans le plan P, a le point O pour foyer, et touche la trace du plan Π sur le plan P. Les projections des vitesses des divers points de Π sur ce plan Π passent toutes par le foyer F de ce plan. La réciprocité exposée plus haut dans le cas général n'existe plus.

IIe Méthode. — On détermine d'abord, comme dans la méthode précédente le foyer F du plan $A_1 A_2 A_3$ ou Π, en menant le cercle passant par A_1, A_2, et le point d'intersection des projections sur ce plan des vitesses des points A_1 et A_2; et en prenant le point commun à ce cercle et aux deux cercles analogues passant par $A_2 A_3$ et $A_3 A_1$. On passe ensuite à la détermination de la caractéristique de ce plan.

Nous indiquerons deux constructions.

1° La projection sur le plan Π de la vitesse d'un point A de ce plan fait avec la droite AF un angle constant V_1. En menant du point F une droite FC'_3 qui forme, dans le sens convenable, l'angle V avec la droite $A_1 A_2$, on a le point C'_3 dont la vitesse a pour projection $A_1 A_2$. Soit C_3 le point où $A_1 A_2$ rencontre la caractéristique de Π.

Considérons maintenant l'élément de surface réglée décrit par la droite $A_1 A_2$ dans le déplacement infiniment petit. Les plans tangents aux points A_1 et A_2 sont déterminés par la droite et les vitesses D_1 et D_2; le plan tangent en C'_3 est perpendiculaire à P; le plan tangent en C_3 est Π lui-même. Ces quatre plans tangents sont connus, et l'on connaît le rapport anharmonique du faisceau qu'ils forment; ce rapport est d'ailleurs le même que celui des points A_1, A_2, C'_3, C_3; comme les 3 premiers points sont connus, le rapport anharmonique fait connaître le quatrième.

2°. — La composante dans le plan Π de la vitesse d'un point A de ce plan est proportionnelle à sa distance FA au foyer du plan; soit α l'angle de la vitesse du point A avec le plan Π. La composante normale au plan, de cette vitesse s'obtient en multipliant par $\operatorname{tg}\alpha$ la composante située dans ce plan.

Ainsi les composantes normales des vitesses des points A_1, A_2, A_3, sont proportionnelles à $FA_1 . \operatorname{tg}\alpha_1$, $FA_2 . \operatorname{tg}\alpha_2$, $FA_3 . \operatorname{tg}\alpha_3$. On peut les affecter d'un signe suivant qu'elles sont dirigées d'un côté ou de l'autre du plan.

Digitized by Google

D'un autre côté, ces composantes normales sont aussi proportionnelles aux distances des points A_1, A_2, A_3 à la caractéristique. On aura donc la caractéristique en prenant l'axe de similitude de 3 cercles de centres A_1, A_2, A_3, et dont les rayons sont, (avec les signes convenables), $FA_1 . \operatorname{tg}\alpha_1$, $FA_2 . \operatorname{tg}\alpha_2$, $FA_3 . tg\alpha_3$.

La composante de la vitesse normale d'un point du plan Π est proportionnelle à sa distance à la caractéristique ; la composante située dans ce plan est proportionnelle à la distance au foyer ; on a donc, en chaque point du plan, la direction de la vitesse.

Le foyer d'une droite du plan s'obtient en menant par le foyer F du plan une droite qui fait avec cette droite, dans le sens convenable, un angle égal au complément de V_1. D'autre part, le foyer de la caractéristique est situé dans le plan double P, et la tangente à la trajectoire de ce point est la trace du plan Π sur le plan P. Pour avoir le plan P, il suffit de construire la tangente à la trajectoire d'un point de cette trace. Ayant le plan double, il est aisé de construire le pôle double O.

Cas où les projections sur le plan $A_1 A_2 A_3$ ou Π des vitesses D_1, D_2, D_3 des points A_1, A_2, A_3 sont concourantes.

Soit F le point de concours des projections d_1, d_2, d_3, des vitesses D_1, D_3, D_3. Il y a lieu de subdiviser le cas en deux : celui où le point F ne se trouve pas sur le cercle circonscrit au triangle A_1, A_2, A_3, et celui où ce point se trouve sur ce cercle.

1° *Le point* F *n'est pas sur le cercle circonscrit à* $A_1 A_2 A_3$.

La position d'un triangle infiniment voisin de $A_1 A_3 A_3$, semblable à ce triangle, et dont les sommets sont sur les droites concourantes d_1, d_2, d_3, est celle d'un triangle homothétique, le centre d'homothétie étant au point F. Les projections des vitesses de tous les points du plan Π passent alors par le point F ; la rotation autour de F est nulle, On reconnaît le cas où le plan Π est perpendiculaire au plan double P.

La caractéristique du plan Π se construit, comme plus haut, au moyen des composantes normales au plan Π des vitesses des points A_1, A_2, A_3, et la trace du plan Π sur le plan P est la perpendiculaire menée de F sur cette caractéristique.

Le plan P étant perpendiculaire au plan Π, cette trace le détermine. Le pôle double O s'obtient aisément dans le plan P ; c'est, par exemple, le foyer de la parabole tangente à 4 droites qui sont : la trace du plan Π sur le plan P, et les projections des droites D_1, D_2, D_3 sur ce même plan.

Digitized by Google

2° *Le point* F *est sur le cercle circonscrit à* $A_1 A_2 A_3$.

Si l'on joint un point quelconque de ce cercle aux points A_1, A_2, A_3, ces droites font respectivement des angles égaux avec les projections d_1, d_2, d_3; et, par conséquent, tout point de ce cercle peut être pris pour foyer du plan $A_1 A_2 A_3$. Le problème est indéterminé ; nous verrons plus tard qu'il y a une infinité de déplacements qui font décrire le même élément de trajectoire à chacun des points A_1, A_2, A_3; et que le lieu des centres instantanés correspondants, O, est une cubique gauche, tandis que l'enveloppe des plans doubles est un cylindre parabolique.

Cas où les points A_3, A_2, A_1, sont en ligne droite.

Les vitesses de tous les points d'une droite appartenant à un paraboloïde, pour que le déplacement soit possible, il faut que les droites D_1, D_2, D_3 soient dans un même plan ou parallèles à un même plan. Si l'une ou l'autre de ces conditions est remplie, le déplacement n'est pas déterminé, car le système Σ peut prendre un mouvement arbitraire autour de la droite $A_1 A_2 A_3$.

Dans le cas où les vitesses sont dans un même plan Π, ce plan a pour caractéristique la droite $A_1 A_2 A_3$; on obtient aisément, par des constructions déjà vues, le foyer F de ce plan, et la trace du plan double sur le plan Π. Le plan double, qui est variable, tourne autour de cette trace.

Si les vitesses ne sont pas dans un même plan, on peut construire les sphères Φ qui correspondent aux trois points, car elles passent par le foyer de la droite $A_1 A_2 A_3$, qui est le point où cette droite est perpendiculaire à une génératrice d'un système différent, dans le paraboloïde, lieu des vitesses. Les points diamétralement opposés, A'_1, A'_2, A'_3, sont sur une ligne droite perpendiculaire à $A_1 A_2 A_3$; et le plan double tourne autour de cette droite. Les sphères Φ passent par un même cercle γ qui rencontre les deux droites $A_1 A_2 A_3$, $A'_1 A'_2 A'_3$, et qui est le lieu du centre instantané ou pôle double O.

Le lieu de l'axe instantané OZ s'obtient en menant par la droite $A'_1 A'_2 A'_3$ un plan P qui rencontre le cercle γ en un point variable O, puis en élevant au plan P en ce point une perpendiculaire OZ.

Soit a' la trace de la droite $A'_1 A'_2 A'_3$ sur le cercle γ ; le plan P coupe le plan de ce cercle suivant la droite a'O, et l'axe OZ se projette sur le plan du cercle γ suivant la droite aO perpendiculaire à a'O. Il rencontre donc la perpendiculaire menée au plan du cercle par le point a diamétralement opposé à a' dans le cercle. D'ailleurs OZ est toujours parallèle à un plan perpendiculaire à $A'_1 A'_2 A'_3$.

Digitized by Google

On voit ainsi que la surface, lieu de OZ, est un conoïde engendré par une droite qui s'appuie sur un cercle γ, sur une droite perpendiculaire au plan de ce cercle en un de ses points a, et qui reste parallèle à un plan donné.

Si l'on prend pour origine le point a, pour plan des xy le plan du cercle, pour axe des z la perpendiculaire menée du point a au plan du cercle, pour plan des zy un plan perpendiculaire au plan directeur du conoïde, l'équation de cette surface est

$$(z-my)(x^2+y^2)+2my(ax+by)=o.$$

IIIe Méthode. — Par les points donnés $A_1 A_2 A_3$, je mène des plans respectivement perpendiculaires aux vitesses de ces points, $D_1 D_2 D_3$. Je suppose que ces trois plans se coupent en un point unique I, situé en dehors du plan des trois points donnés. La sphère qui passe par ces points et par le point I est la sphère Φ de ce dernier point, puisque A_1, A_2, A_3 sont les foyers de plans passant par I. Le diamètre de la sphère qui a une extrémité au point I donne la direction de la vitesse de ce point ; l'autre extrémité I′ est dans le plan double, et le pôle double est sur la sphère Φ.

Considérons le plan Π_1 qui a été mené par A_1 perpendiculaire à D_1 ; la droite II′ se projette sur ce plan suivant une droite qui fait avec A_1 I un certain angle V_1. En désignant par r_1 la composante perpendiculaire à Π_1 de la rotation ω autour de l'axe instantané OZ, et par λ, comme toujours, le paramètre relatif à l'homothétie, on a $\frac{r_1}{\lambda} = \operatorname{tg} V_1$. Ainsi $\operatorname{tg} V_1$ représente la projection du vecteur $\frac{\omega}{\lambda}$ sur la normale au plan Π_1, c'est-à-dire sur D_2. On aura de même $\operatorname{tg} V_2$ et $\operatorname{tg} V_3$ qui représentent les projections du même vecteur sur D_2 et D_3. Le vecteur est ainsi déterminé ; et on est conduit à la construction suivante.

Après avoir mené par les points A_1, A_2, A_3, des plans Π_1, Π_2, Π_3 respectivement perpendiculaires à D_1, D_2, D_3, et se coupant en un point I, et après avoir construit la sphère Φ passant par A_1, A_2, A_3, I, on projettera sur les plans Π_1, Π_2, Π_3 le diamètre II′ de Φ, qui aboutit au point I, suivant des droites qui forment les angles V_1, V_2, V_3 avec les droites IA_1, IA_2, IA_3.

On portera à partir des points A_1, A_2, A_3, les longueurs $A_1 B_1, A_1 B_2, A_3 B_3$, proportionnelles à $\operatorname{tg} V_1$, $\operatorname{tg} V_2$, $\operatorname{tg} V_3$, sur les droites D_1, D_2, D_3, et aux points B_1, B_2, B_3, on mènera des plans perpendiculaires à D_1, D_2, D_3, se coupant en un point K. La droite IK est parallèle à l'axe instantané OZ.

On a le plan double en menant, par l'extrémité I′ du diamètre II′ un plan perpendiculaire à IK. On achève sans peine la construction par la détermination du pôle double.

Quand les plans perpendiculaires aux 3 vitesses sont parallèles à une même droite, la construction précédente n'est plus possible ; le plan des trois points

Digitized by Google

passe par le centre instantané. Quand ces trois plans se coupent en un même point de leur plan, si les projections des vitesses sur ce plan ne passent pas par un même point, le déplacement est celui d'un système invariable ; si les projections passent par un même point, il y a une infinité de déplacements, et le problème est indéterminé.

Examinons maintenant le cas où les trois plans perpendiculaires aux vitesses passent par une même droite.

La sphère Φ relative à un point quelconque de cette droite passe par les trois points, et le cercle circonscrit au triangle de ces trois points est commun à toutes ces sphères. Les propriétés du déplacement infiniment petit montrent que la droite D et le cercle doivent se rencontrer. Si cette condition n'est pas réalisée, il n'y a qu'un déplacement possible, c'est celui qui est obtenu en faisant tourner le système autour de la droite, sans modifier ses dimensions. Si le cercle et la droite D se rencontrent, il y a une infinité de déplacements possibles ; on voit aisément que ce cas n'est autre que celui, déjà traité, où l'on donnerait les vitesses des points de la droite. Le cercle passe par le centre instantané, dont il est le lieu géométrique ; quant au plan double, il passe par la droite qui joint les points diamétralement opposés aux points de la droite D dans leurs sphères Φ. Le lieu de l'axe instantané est le conoïde déjà obtenu.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE ANALYTIQUE

Ire PARTIE

DÉPLACEMENT A UN SEUL PARAMÈTRE

Développement en séries des coordonnées des éléments du système.

Soit Σ' le système infiniment voisin de Σ, et qui lui est homographique, le plan de l'infini se correspondant à lui-même ; au point (x, y, z) correspond le point infiniment voisin (x', y', z').

Désignons par δx, δy, δz les segments $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$; on a :

$$(1)\quad \begin{aligned} \delta x &= ax + by + cz + d \\ \delta y &= a'x + b'y + c'z + d' \\ \delta z &= a''x + b''y + c''z + d'' \end{aligned}$$

les cœfficients $a, b, c, d, a', \ldots$ étant des fonctions d'un seul paramètre t, qui peut désigner le temps.

Si le système Σ' est semblable à Σ, (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) étant deux points de Σ, la distance de ces deux points est dans un rapport constant avec la distance des deux points homologues de Σ'.

Si donc on pose $u = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$,

on aura $\delta(\sqrt{u}) = k\sqrt{u}$, k étant fonction de t seulement.

Cette relation s'écrit aussi $\delta u = 2ku$, ou encore

$$(x_1 - x)(\delta x_1 - \delta x) + (y_1 - y)(\delta y_1 - \delta y) + (z_1 - z)(\delta z_1 - \delta z) = k\left[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right]$$

Digitized by Google

En vertu des relations (1) on a :

$$a(x_1-x)^2+b(x_1-x)(y_1-y)+c(x_1-x)(z_1-z)+a'(y_1-y)(x_1-x)+b'(y_1-y)$$
$$+c'(y_1-y)(z_1-z)+a''(z_1-z)(x_1-x)+b''(y_1-y)(z_1-z)+c''(z_1-z)^2=$$
$$=k\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right]$$

Comme cette relation doit avoir lieu pour toutes les valeurs des coordonnées, on doit avoir aussi :

$$a=b'=c''=k\,;\ b+a'=o\,;\ c+a''=o\,;\ c'+b''=o.$$

Si donc l'on pose $\frac{b''}{\delta t}=-\frac{c'}{\delta t}=p\,;\ \frac{c}{\delta t}=-\frac{a''}{\delta t}=q\,;\ \frac{a'}{\delta t}=-\frac{b}{\delta t}=r\,;\ \frac{d}{\delta t}=u'\,;$ $\frac{d'}{\delta t}=v'\,;\ \frac{d''}{\delta t}=w'\,;\ \frac{k}{\delta t}=\lambda$, les relations (1) deviennent :

$$(1)\quad \begin{aligned}\frac{\delta x}{\delta t}&=u'+qz-ry+\lambda x\\ \frac{\delta y}{\delta t}&=v'+rx-pz+\lambda y\\ \frac{\delta z}{\delta t}&=w'+py-qz+\lambda z\end{aligned}$$

On peut aussi arriver à ces formules en rattachant la question, comme l'a fait M. Kœnigs pour un système invariable, aux transformations infinitésimales ponctuelles de Sophus Lie.

Posons, en effet, $x'=x+X\delta t$, $y'=y+Y\delta t$, $z'=z+Z\delta t$; X, Y, Z, étant des fonctions de x, y, z ;

on a $\delta x=x'-x=X\delta t$; $\delta y=Y\delta t$; $\delta z=Z\delta t$;
de même pour (x_1, y_1, z_1),
on a $\delta x_1=X_1\delta t$; $\delta y_1=Y_1\delta t$; $\delta z_1=Z_1\delta t$;
où X_1, Y_1, Z_1

sont les fonctions X, Y, Z, dans lesquelles on a remplacé x, y, z par x_1, y_1, z_1.

On doit avoir δu (1) $=2\lambda u.\ \delta t$; λ étant indépendant des coordonnées. Cette relation s'écrit :

$$(x-x_1)(X-X_1)+(y-y_1)(Y-Y_1)+z-z_1)(Z-Z_1)=\lambda\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right]$$

Si le point $(x_1, y_1\ z_1)$ est infiniment voisin de (x, y, z), on a

$x_1=x+dx,\ y_1=y+dy,\ z_1=z+dz,$
$X_1=X+dX,\ Y_1=Y+dY,\ Z_1=Z+dZ,$ et la relation devient :

(1) Cette fonction u désignant la distance de deux points ne doit pas être confondue avec celle dont la dérivée se trouve dans les formules (1).

Digitized by Google

$$dX.\,dx + dY.\,dy + dZ.\,dz = \lambda\,(dx^2 + dy^2 + dz^2), \text{ ou encore}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial Y}{\partial y}dy^2 + \frac{\partial Z}{\partial z}dz^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx\,dy$$
$$= \lambda\,(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = \lambda;\ \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = o$$

Posons $\frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial z} = p;\ \frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{\partial Y}{\partial x} = q;\ \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} = r.$

On a $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial x}$; or ce second membre est nul, puisque $\frac{\partial X}{\partial x} = \lambda$, et que λ est indépendant des coordonnées ; de même $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y\,\partial x} = o$. Donc r ne peut être fonction que de z, de même p que de x, et q que de y.

Mais des relations $\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}$, on tire $-\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial y}$.

On trouve de même $-\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}$, et $-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$.

Ces relations exigent que l'on ait $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial z} = o$; donc p, q, r sont, comme λ, indépendants des coordonnées, et on a :

$$X \text{ ou } \frac{\delta x}{\delta t} = u' + qz - ry + \lambda x$$
$$\frac{\delta y}{\delta t} = v' + rx - pz + \lambda y$$
$$\frac{dz}{\delta t} = w' + py - qx + \lambda z$$

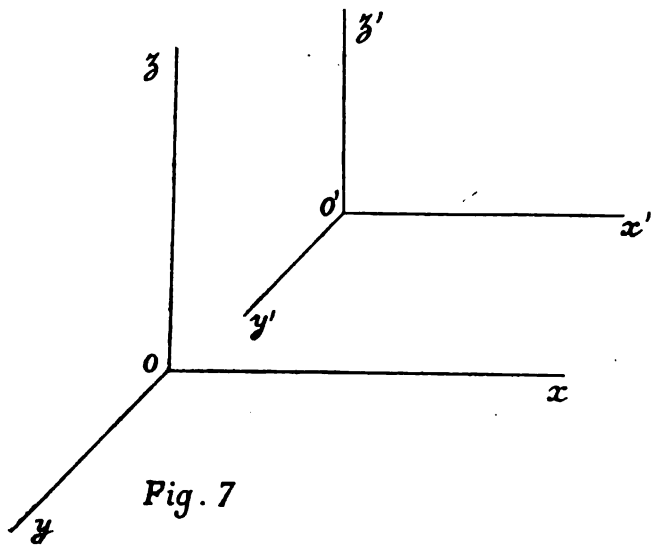


Fig. 7

Si le paramètre t représente le temps, les premiers membres sont les composantes de la vitesse du point (x,y,z), et u', v', w', celles de la vitesse de l'origine des coordonnées.

2. — Soit O, xyz un trièdre fixe, par un point déterminé O′ du système mobile Σ, menons des parallèles aux arêtes du trièdre fixe. Les coordon-

Digitized by Google

nées du point O' étant u, v, w, les formules (2)' peuvent s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = u' + (z-w)q - (y-v)r + \lambda(x-u)$$
$$\frac{dy}{dt} = v' + (x-u)r - (z-w)p + \lambda(y-v)$$
$$\frac{dz}{dt} = w' + (y-v)p - (x-u)q + \lambda(z-w)$$

Ces équations vont nous permettre de développer x, y, z en séries ordonnées suivant les puissances de t. On a, en effet, en dérivant :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} = {} & u'' + (z-w)q' - (y-v)r' + q\left[(y-v)p - (x-u)q + \lambda(z-w)\right] \\ & - r\left[(x-u)r - (z-w)p + \lambda(y-v)\right] + \frac{d\lambda}{dt}(x-u) \\ & + \lambda\left[(z-w)q - (y-v)r + a(x-u)\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = {} & v'' + (x-u)r' - (z-w)p' + r\left[(z-w)q - (y-v)r + \lambda(x-u)\right] \\ & - p\left[(y-v)p - (x-u)q + \lambda(z-w)\right] + \frac{d\lambda}{dt}(y-v) \\ & + \lambda\left[(x-u)r - (z-w)p + \lambda(y-v)\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} = {} & w'' + (y-v)p' - (x-u)q' + p\left[(x-u)r - (z-w)p + \lambda(y-v)\right] \\ & - q\left[(z-w)q - (y-v)r + \lambda(x-u)\right] + (z-w)\frac{d\lambda}{dt} \\ & + \lambda\left[(y-v)p - (x-u)q + \lambda(z-w)\right].\end{aligned}$$

On pourra ainsi calculer des dérivées successives de x, y et z, puis, en y faisant $t=o$, développer ces coordonnées par la série de Maclaurin.

Supposons qu'à l'origine du temps le trièdre mobile coïncide avec le trièdre fixe, et qu'à ce moment les coordonnées de (x, y, z) soient a, b, et c. On a alors les développements.

$$(2)\quad \begin{cases} x = a + (u' + cq - br + \lambda a)t + \left[u'' + cq' - br' + a\lambda' - a(q^2 + r^2 - \lambda^2) + bpq + cpr + 2\lambda cq - 2\lambda br\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \\ y = b + (v' + ar - cp + \lambda b)t + \left[v'' + ar' - cp' + b\lambda' - b(r^2 + p^2 - \lambda^2) + cqr + apq + 2a\lambda r - 2c\lambda p\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \\ z = c + (w' + bp - aq + \lambda c)t + \left[w'' + bp' - aq' + c\lambda' - c(p^2 + q^2 - \lambda^2) + aqr + bqr + 2\lambda cp - 2\lambda aq\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \end{cases}$$

Dans ces développements, il faut donner aux éléments u', v', w', p, q, r, λ, et à leurs dérivées, les valeurs qu'ils ont à l'origine du temps.

Cherchons s'il existe un point qui à ce moment ait une vitesse nulle ; on doit avoir

Digitized by Google

$$\lambda a - rb + qc + u' = o$$
$$ra + \lambda b - pc + v' = o$$
$$-qa + pb + \lambda c + w' = o$$

Le déterminant des inconnues est $\lambda(\lambda^2 + p^2 + q^2 + r^2)$. Comme nous admettons $\lambda \geqq 0$, ce déterminant n'est pas nul, et il existe un point unique à distance finie, dont la vitesse est nulle. Supposons que l'origine O a été prise en ce point, et que, de plus, l'axe OZ coïncide avec la direction (p, q, r), c'est-à-dire avec l'axe de la rotation, qui, avec l'homothétie $1 + \lambda t$, fait passer le système Σ à sa position infiniment voisine ; on a alors $u' = v' = w' = p = q = o$, et les développements (2) deviennent :

$$x = a + (\lambda a - br)t + \left[u'' + cq' - br' + a\lambda' - a(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda br\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$
$$y = b + (ar + \lambda b)t + \left[v'' + ar' - cp' + b\lambda' - b(r^2 - \lambda^2) + 2\lambda ar\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$
$$z = c + \lambda ct + \left[w'' + bp' - aq' + c\lambda' + c\lambda^2\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous allons encore simplifier ces formules ; remarquons pour cela que, après un temps infiniment petit t, et en s'arrêtant au second ordre, les coordonnées du point (o, o, c) de l'axe Oz deviennent

$$x = (u'' + cq')\frac{t^2}{2}$$
$$y = (v'' - cp')\frac{t^2}{2}$$
$$z = c + \lambda ct + \left[w'' + c\lambda' + c\lambda^2\right]\frac{t^2}{1.2}$$

En éliminant c entre les deux premières équations on a la projection sur le plan xoy de la nouvelle position de la droite oz : $\left(x - u''\frac{t^2}{2}\right)p' + \left(y - v''\frac{t^2}{2}\right)q' = o.$

Si l'on prend l'axe Oy parallèle à cette projection, on a $q' = o$, et les formules deviennent, en définitive :

$$(3)\quad \begin{cases} x = a + (\lambda a - br)\,t + \left[u'' - br' + a\lambda' - a(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda br\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots. \\ y = b + (ar + \lambda b)\,t + \left[v'' + ar' - cp' + b\lambda' - b(r^2 - \lambda^2) + 2\lambda ar\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots. \\ z = c + \lambda ct + \left[w'' + bp' + c\lambda' + c\lambda^2\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots. \end{cases}$$

Digitized by Google

3. — Mouvement inverse.

Considérons deux systèmes Σ et Σ_1 coïncidant à l'époque $t=o$; désignons les coordonnées d'un point M par a, b, c, en tant que M appartient à Σ, et par x, y, z, les coordonnées de ce même point considéré comme appartenant à Σ_1. Les formules (3) donnent le déplacement, en fonction du temps, de Σ_1 par rapport au trièdre fixe O_1xyz considéré comme appartenant à Σ.

Mais si on regarde x, y, z comme fixes, et a, b, c comme des variables liées, à x, y, z et au temps par ces mêmes formules (3), on a le mouvement de Σ par rapport à Σ_1 considéré comme fixe, le trièdre O_1xyz étant maintenant attaché à Σ_1 ; c'est ce que nous avons appelé le mouvement inverse ou indirect.

Nous aurons donc les formules du mouvement inverse en développant, d'après les formules (3), les coordonnées a, b, c suivant les puissances de t.

Les relations (3) donnent

$$(3)' \quad \left\{ \begin{aligned} a &= x - (-br + \lambda a)\,t - \left[u'' - br' + a\lambda' - a(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda br\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \\ b &= y - (ar + \lambda b) - \left[v'' + ar' - cp' + b\lambda' - b(r^2 - \lambda^2) + 2\lambda ar\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \\ c &= z - \lambda ct - \left[w'' + bp' + c\lambda' + c\lambda^2\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Remplaçons dans les seconds membres a, b, c par les valeurs données par ces mêmes relations. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} (-br + \lambda a)\,t &= (-ry + \lambda x)\,t + [2\lambda br + a(r^2 - \lambda^2)]\,t + \ldots \\ (ar + \lambda b)\,t &= (rx + \lambda y)\,t + \ldots \\ \lambda ct &= \lambda zt + \ldots \end{aligned}$$

Substituant encore dans les seconds membres les valeurs de a, b, c tirées toujours des formules $(3)'$, et calculant de proche en proche les coefficients des puissances successives de t, on arrive aux développements :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= x + (ry - \lambda x)\,t + \left[-u'' + r'y - \lambda' x - x(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda ry\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \\ b &= y + (-rx - \lambda y)\,t + \left[-v'' - r'x + p'z - \lambda' y - y(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda ry\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \\ c &= z - \lambda zt + \left[-w'' - p'y - \lambda' z + \lambda^2 z\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

On voit qu'ils se déduisent des développements (3), par le changement de signe de u, v, w, p, q, r, λ ainsi que de leurs dérivées.

On se rend bien compte que dans le mouvement inverse les signes de u, v, w, p, q, r doivent être changés ; le changement de signe de λ peut s'expliquer de la manière suivante.

Puisque nous nous attachons, pour cette explication, à considérer seulement les rapports des grandeurs des deux systèmes, nous pouvons dans les formules (3) annuler u, v, w, p, q, r, et leurs dérivées. Il vient alors

$$x = a + \lambda a t + (\lambda^2 + \lambda') a \frac{t^2}{1.2} + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') a \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$y = b + \lambda b t + (\lambda^2 + \lambda') b \frac{t^2}{1.2} + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') b \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$z = c + \lambda c t + (\lambda^2 + \lambda') c \frac{t^2}{1.2} + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') c \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots$$

Le rapport des dimensions linéaires du système Σ_1 à celles du système Σ supposé fixe est donc

$$K = 1 + \lambda t + (\lambda^2 + \lambda') \frac{t^2}{1.2} + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Soit maintenant K' le rapport, dans le mouvement inverse des dimensions linéaires du système Σ à celles du système Σ_1 supposé fixe, à l'époque t. On doit avoir $K.K' = 1$. Or on vérifie sans peine l'identité

$$\left[1 + \lambda t + (\lambda^2 + \lambda') \frac{t^2}{1.2} + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots\right]\left[1 - \lambda t + (\lambda^2 - \lambda') \frac{t^2}{1.2} + (-\lambda^3 + 3\lambda\lambda' - \lambda'') \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots\right] = 1$$

4. — Coordonnées d'un plan.

Soit un segment de droite OA, ayant pour extrémités, à l'époque $t = o$, l'origine O, et un point A dont les coordonnées sont α, β, γ. A une époque quelconque t, les projections de ce segment s'obtiendront en retranchant des nouvelles coordonnées du point A, les nouvelles coordonnées du point qui était à l'origine. Celles-ci s'obtiennent en remplaçant, dans les formules (3), a, b, c par zéro ; ce qui donne

$$x = u'' \frac{t^2}{2} + \ldots.$$

$$y = v'' \frac{t^2}{2} + \ldots.$$

$$z = w'' \frac{t^2}{2} + \ldots.$$

Digitized by Google

Les nouvelles projections du segment OA, à l'époque t, sont donc données par les développements :

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha + (\lambda\alpha - r\beta)\,t + \left[\lambda'\alpha - r'\beta - (r^2-\lambda^2)\,\alpha - 2\lambda r\beta\right]\dfrac{t^2}{1.2} + \ldots. \\ \beta_1 = \beta + (r\alpha + \lambda\beta)\,t + \left[r'\alpha + \lambda'\beta - p'\gamma - (r^2-\lambda^2)\,\beta + 2\lambda r\alpha\right]\dfrac{t^2}{1.2} + \ldots. \\ \gamma_1 = \gamma + \lambda\gamma t + (\lambda'\gamma + p'\beta + \lambda^2\gamma)\,\dfrac{t^2}{1.2} + \ldots. \end{cases}$$

Soit maintenant un plan qui, à l'époque $t = o$, est défini par un de ses points (a, b, c), et par le segment OA (α, β, γ) qui lui est perpendiculaire. Son équation est

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - (a\alpha + b\beta + c\gamma) = o.$$

Posons $a\alpha + b\beta + c\gamma = \delta$; on peut prendre pour coordonnées du plan : α, β, γ, δ. Nous nous proposons de trouver les développements qui donnent les valeurs α_1, β_1, γ_1, δ_1 de ces coordonnées à l'époque t.

Les formules (5) résolvent la question pour $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$; pour avoir δ_1, nous remplacerons a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 par leurs développements dans l'expression $a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1$.

On trouve ainsi :

$$a_1\alpha_1 = a\alpha + [2\lambda a\alpha - r(a\beta + b\alpha)]\,t +$$
$$+ \left\{2(-br+\lambda a)(-\beta r+\lambda\alpha) + \alpha[u''-br'+a\lambda'-a(r^2-\lambda^2)-2\lambda rb] + a[\lambda'\alpha - r'\beta - (r^2-\lambda^2)\alpha - 2\lambda r\beta)]\right\}\frac{t^2}{1.2} + \ldots..$$
$$b_1\beta_1 = b\beta + [2b\lambda\beta + r(a\beta + b\alpha)]\,t +$$
$$+ \left\{2(ra+\lambda b)(r\alpha+\lambda\beta) + \beta[v''+r'a-p'c+\lambda'b-(r^2-\lambda^2)b+2\lambda ra] + b[r'\alpha-p'\gamma+\lambda'\beta-(r^2-\lambda^2)\beta+2\lambda r\alpha]\right\}\frac{t^2}{1.2} + \ldots$$
$$c_1\gamma_1 = c\gamma + 2\gamma ct +$$
$$+ \left\{2\lambda^2 c\gamma + \gamma(w''+bp'+c\lambda'+c\lambda^2) + c(p'\beta + \lambda'\gamma + \lambda^2\gamma)\right\}\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

Ajoutant membre à membre, nous obtenons, après réductions,

$$\delta_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma + 2\lambda(a\alpha + b\beta + c\gamma)\,t + \left[4\lambda^2(a\alpha+b\beta+c\gamma) + 2\lambda'(a\alpha+b\beta+c\gamma) + \alpha u'' + \beta v'' + \gamma w''\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots$$

ou encore,

$$(5)'\quad \delta_1 = \delta + 2\lambda\delta.\,t + \left[(4\lambda^2 + 2\lambda')\delta + \alpha u'' + \beta v'' + \gamma w''\right]\frac{t^2}{1.2} + \ldots$$

Digitized by Google

5. — Coordonnées d'une droite.

Soit une droite qui, à l'époque $t=o$, a pour équations $\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}$; ses coordonnées homogènes sont α, β, γ, $L=c\beta-b\gamma$, $M=a\gamma-c\alpha$, $N=b\alpha-a\beta$.

Les formules (5) donnent les valeurs α_1, β_1, γ_1 que prennent α, β, γ, à l'époque t; quant à L_1, M_1, N_1, on les obtient en substituant dans les expressions de L, M, N, les lettres a, b, c, α, β, γ par les développements (3) et (5); on trouve ainsi :

$$(6)\left\{\begin{aligned}
L_1 &= L+(2\lambda L-rM)\,t+\left[\beta w''-\gamma v''-4\lambda Mr+2\lambda' L-r'M-(r^2-4\lambda^2)\,L\right]\frac{t^2}{1.2}+\ldots\ldots\\
M_1 &= M+(2\lambda M+rL)\,t+\left[\gamma u''-\alpha w''+4\lambda rL+2\lambda' M+r'L-(r^2-4\lambda^2)\,M-Np'\right]\frac{t^2}{1.2}+\ldots\\
N &= N+2\lambda Nt+\left[\alpha v''-\beta u''+Mp'+2N\lambda'+4N\lambda^2\right]\frac{t^2}{1.2}+\ldots
\end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer que, dans tous les développements que nous avons obtenus, les coefficients des puissances de t sont des fonctions linéaires des valeurs des coordonnées à l'époque $t=o$.

6. — Il existe entre les coefficients des développements précédents des identités intéressantes et qui seront utilisées dans la suite.

Soient par exemple, a, a', a''... ; b, b', b'',... ; c, c', c''... les coefficients des développements des coordonnées x, y, z d'un point. On a d'abord

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+2\,(aa'+bb'+cc')\,t+(a'^2+b'^2+c'^2+aa''+bb''+cc'')\,t^2+\ldots.$$

Considérons d'autre part le segment OA qui à l'époque $t=o$ joint l'origine au point A (a, b, c). A l'époque t, le point (a, b, c) est devenu le point (x, y, z); l'origine est devenue le point (u, v, w); $\overline{OA}^2$ ou $a^2+b^2+c^2$, est devenu $(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$. Or, si nous désignons par k le rapport des dimensions linéaires homologues à l'époque t, et à l'époque zéro, nous avons vu que

$$\text{l'on a}\quad k=1+\lambda t+(\lambda^2+\lambda')\frac{t^2}{1.2}+(\lambda^3+3\lambda\lambda'+\lambda'')\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

$$\text{d'où}\quad k^2=1+2\lambda t+(2\lambda^2+\lambda')\,t^2+\left(\frac{4\lambda^3}{3}+2\lambda\lambda'+\frac{\lambda''}{3}\right)t^3+\ldots\ldots$$

On a aussi $$u=u''\frac{t^2}{2}+u'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots$$

Digitized by Google

$$v = v'' \frac{t^2}{2} + v''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$w = w'' \frac{t^2}{2} + w''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots$$

Dans la relation : $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = k^2(a^2+b^2+c^2)$ ou $x^2+y^2+z^2 = 2ux + 2vy + 2wz + k^2(a^2+b^2+c^2) - u^2 - v^2 - w^2$, introduisons les développements précédents, il vient :

$$a^2+b^2+c^2+2(aa'+bb'+cc')t+(a'^2+b'^2+c'^2+aa''+bb''+cc'')t^2+\left(\frac{aa'''+bb'''+cc'''}{3}+a'a''+b'b''+c'c''\right)t^3+\ldots$$

$$=(au''+bv''+cw'')\,t^2+\left[a'u''+b'v''+c'w''+\frac{au'''+bv'''+cw'''}{3}\right]t^3-u^2-v^2-w^2$$

$$+(a^2+b^2+c^2)\left[1+2\lambda t+(2\lambda^2+\lambda')\,t^2+\left(\frac{4\lambda^3}{3}+2\lambda\lambda'+\frac{\lambda''}{3}\right)t^3+\ldots\right]$$

Nous aurons les identités cherchées en égalant les coefficients des puissances semblables de t. On trouve ainsi :

$$(7)\left\{\begin{array}{l} aa'+bb'+cc'=\lambda(a^2+b^2+c^2) \\ a'^2+b'^2+c'^2+aa''+bb''+cc''=au''+bv''+cw''+(a^2+b^2+c^2)(2\lambda^2+\lambda') \\ \dfrac{aa'''+bb'''+cc'''}{3}+a'a''+b'b''+c'c''=\dfrac{au'''+bv'''+cw'''}{3}+a'u''+b'v''+c'w''+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}(4\lambda^3+6\lambda\lambda'+\lambda'') \end{array}\right.$$

On obtient des identités analogues pour les autres coordonnées, ainsi, en désignant par L, L′, L″ ; M, M′, M″ ;..., N, N′ N″..., les coefficients des développements des coordonnées L_1, M_1, N_1, d'une droite, on trouve :

$$(8)\left\{\begin{array}{l} LL'+MM'+NN'=2\lambda(L^2+M^2+N^2) \\ L'^2+M'^2+N'^2+LL''+MM''+NN''=2(4\lambda^2+\lambda')(L^2+M^2+N^2)+\begin{vmatrix} L & \alpha & u'' \\ M & \beta & v'' \\ N & \gamma & w'' \end{vmatrix} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

6. — Lieu des centres instantanés dans le système et dans l'espace fixe.

Comme application des développements précédents, il sera intéressant de développer suivant les puissances de t les coordonnées des points du système qui deviendront successivement centres instantanés, et celles des positions de l'espace fixe qu'ils occuperont.

En égalant à zéro, pour l'époque t, la vitesse du point (a, b, c), on a

Digitized by Google

$$(9)\begin{cases} o=\lambda a-br+\left[u''-br'+a\lambda'-a(r^2-\lambda^2)-2\lambda br\right]t+\left[u'''+\ldots\right]\frac{t^2}{2}+\ldots. \\ o=ra+\lambda b+\left[v''+ar'-cp'+b\lambda'-b(r^2-\lambda^2)+2\lambda ar\right]t+\left[v'''+\ldots\right]\frac{t^2}{2}+\ldots. \\ o=\lambda c+\left[w''+bp'+c\lambda'+c\lambda^2\right]t+\left[w'''+\ldots\right]\frac{t^2}{2}+\ldots. \end{cases}$$

Nous allons, de ces égalités, tirer a, b, c en fonction de t sous la forme

$$\begin{aligned} a&=\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t^2+\ldots. \\ b&=\mathrm{B}t+\mathrm{B}'t^2+\ldots. \\ c&=\mathrm{C}t+\mathrm{C}'t^2+\ldots. \end{aligned}$$

Remplaçons dans les formules (9) a, b, c, par ces développements, et égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de t.

On obtient d'abord : $o=-r\mathrm{B}+\lambda\mathrm{A}+u''$
$o=r\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}+v''$
$o=\lambda\mathrm{C}+w''$

D'où : $\mathrm{A}=-\frac{\lambda u''+rv''}{\lambda^2+r^2}$; $\mathrm{B}=-\frac{\lambda v''-ru''}{\lambda^2+r^2}$; $\mathrm{C}=-\frac{w''}{\lambda}$.

Passant aux coefficients de t^2, on a

$$\begin{cases} -r\mathrm{B}'+\lambda\mathrm{A}'-r'\mathrm{B}+\lambda'\mathrm{A}-(r^2-\lambda^2)\mathrm{A}-2\lambda r\mathrm{B}+\frac{u'''}{2}=o \\ r\mathrm{A}'+\lambda\mathrm{B}'+r'\mathrm{A}-p'\mathrm{C}+\lambda'\mathrm{B}-(r^2-\lambda^2)\mathrm{B}+2\lambda r\mathrm{A}+\frac{v'''}{2}=o \\ \lambda\mathrm{C}'+p'\mathrm{B}+\lambda'\mathrm{C}+\lambda^2\mathrm{C}+\frac{w'''}{2}=o. \end{cases}$$

On obtient immédiatement C' ;

$$\lambda\mathrm{C}'=p'\frac{\lambda v''-ru''}{\lambda^2+r^2}+\frac{w''}{\lambda}(\lambda^2+\lambda')-\frac{w'''}{2}.$$

Dégageant A' et B' des deux premières équations du groupe précédent, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{A}'(\lambda^2+r^2)+\mathrm{A}\left[\lambda\lambda'+rr'+\lambda(\lambda^2+r^2)\right]-\mathrm{B}\left[\lambda r'\quad r\lambda'+r(\lambda^2+r^2)\right]+\frac{\lambda u'''+rv'''}{2}-p'r\mathrm{C}=o \\ \mathrm{B}'(\lambda^2+r^2)+\mathrm{A}\left[\lambda r'-r\lambda'+r(\lambda^2+r^2)\right]+\mathrm{B}\left[\lambda\lambda'+rr'+\lambda(\lambda^2+r^2)\right]-\frac{ru'''-\lambda v'''}{2}-\lambda p'\mathrm{C}=o \end{cases}$$

Mais : $\mathrm{A}(\lambda^2+r^2)\lambda-r(\lambda^2+r^2)\mathrm{B}=-\lambda^2u''-\lambda rv''+r\lambda v''-r^2u''=-u''(\lambda^2+r^2)$
$\mathrm{A}(\lambda^2+r^2)r+\lambda(\lambda^2+r^2)\mathrm{B}=-r\lambda u''-r^2v''-\lambda^2v''+\lambda ru''=-v''(\lambda^2+r^2)$

Les égalités précédentes deviennent donc :

$$\begin{cases} \mathrm{A}'(\lambda^2+r^2)+\mathrm{A}(\lambda\lambda'+rr')-\mathrm{B}(\lambda r'-r\lambda')-u''(\lambda^2+r^2)+\frac{\lambda u''+rv''}{2}-p'r\mathrm{C}=o \\ \mathrm{B}'(\lambda^2+r^2)+\mathrm{A}(\lambda r'-r\lambda')+\mathrm{B}(\lambda\lambda'+rr')-v''(\lambda^2+r^2)-\frac{ru''-\lambda v''}{2}-p'\lambda\mathrm{C}=o \end{cases}$$

Digitized by Google

Comme d'ailleurs on a :

$$-(\lambda u'' + rv'')(\lambda\lambda' + rr') + (\lambda v'' - ru'')(\lambda r' - r\lambda') = (\lambda^2 - r^2)(r'v'' - \lambda' u'') - 2\lambda r(r'u'' + \lambda' v'')$$
$$(\lambda u'' + rv'')(\lambda r' - r\lambda') + (\lambda v'' - ru'')(\lambda\lambda' + rr') = (\lambda^2 - r^2)(r'u'' + \lambda' v'') + 2\lambda r(r'v'' - \lambda' u'');$$

Il vient :

$$A'(\lambda^2 + r^2) + \frac{\lambda^2 - r^2}{\lambda^2 + r^2}(r'v'' - \lambda' u'') - \frac{2\lambda r}{\lambda^2 + r^2}(r'u'' + \lambda' v'') - u''(\lambda^2 + r^2) + \frac{\lambda u''' + rv'''}{2} + \frac{p' r w''}{\lambda} = o$$
$$B'(\lambda^2 + r^2) - \frac{\lambda^2 - r^2}{\lambda^2 + r^2}(r'u'' + \lambda' v'') - \frac{2\lambda r}{\lambda^2 + r^2}(r'v'' - \lambda' u'') - v''(\lambda^2 + r^2) - \frac{ru''' - \lambda v'''}{2} - p' w'' = o$$

On a donc, en définitive,

$$(10)\begin{cases} a = -\dfrac{\lambda u'' + rv''}{\lambda^2 + r^2} t + \left[u'' - \dfrac{\lambda u''' + rv''' + 2\dfrac{p'r}{\lambda} w''}{2(\lambda^2 + r^2)} - \dfrac{(\lambda^2 - r^2)(r'v'' - \lambda' u'') - 2\lambda r(r'u'' + \lambda' v'')}{(\lambda^2 + r^2)^2}\right] t^2 + \ldots \\ b = -\dfrac{\lambda v'' - ru''}{\lambda^2 + r^2} t + \left[v'' + \dfrac{ru''' - \lambda v''' + 2p' w''}{2(\lambda^2 + r^2)} + \dfrac{(\lambda^2 - r^2)(r'u'' + \lambda' v'') + 2\lambda r(r'v'' - \lambda' u'')}{(\lambda^2 + r^2)^2}\right] t^2 + \ldots \\ c = -\dfrac{w''}{\lambda} t + \left[\dfrac{w''(\lambda^2 + \lambda')}{\lambda^2} + \dfrac{p'(\lambda v'' - ru'')}{\lambda(\lambda^2 + r^2)} - \dfrac{w'''}{2\lambda}\right] t^2 + \ldots \end{cases}$$

Quant t varie, le point (a, b, c) décrit la courbe, lieu géométrique des centres instantanés successifs, liée au système Σ.

Le point (a, b, c) déterminé par les développements (10) est celui qui à l'époque t aura une vitesse nulle. Pour avoir ses coordonnées à cette époque, il faut remplacer a, b, c par ces développements dans les formules (3). On obtient, réductions faites :

$$(11)\begin{cases} x = At + \left(A' - \dfrac{u''}{2}\right) t^2 + \ldots \\ y = Bt + \left(B' - \dfrac{v''}{2}\right) t^2 + \ldots \\ z = Ct + \left(C' - \dfrac{w''}{2}\right) t^2 + \ldots \end{cases}$$

Quand t varie, le point (x, y, z) décrit la courbe, lieu géométrique des centres instantanés dans l'espace fixe. Les formules (10) et (11) montrent que ces deux courbes, dans le système mobile et dans l'espace fixe, sont tangentes.

On obtiendrait d'une manière analogue, dans le système mobile et dans l'espace fixe, les développables engendrées par le plan double, et les surfaces réglées, lieux géométriques des axes instantanés de rotation.

Digitized by Google

Ellipsoïde des vitesses. — Vitesses des points d'un plan. — Foyer. — Caractéristique.

1. — Soient v_x, v_y, v_z les projections de la vitesse v du point M du système Σ dont les coordonnées sont a, b, c, à l'époque $t=o$; les formules (3) montrent que l'on a :

$$\left.\begin{array}{ll} & v_x=\lambda a-br\,;\ v_y=ra+\lambda b\,;\ v_z=\lambda c\,; \\ \text{d'où} & v^2=(\lambda^2+r^2)(a^2+b^2)+\lambda^2 c^2 \end{array}\right\}\ (1)$$

La tangente à la trajectoire du point (a, b, c) a donc pour équations $\frac{x-a}{\lambda a-br}=\frac{y-b}{ra+\lambda b}=\frac{z-c}{\lambda c}$ (2)

Cette droite perce le plan xoy au point $t\left(x'=\frac{br}{\lambda},\ y'=\frac{-ar}{\lambda},\ z'=o\right)$; la droite qui joint l'origine O au point t $(x'\ y'\ o)$, est perpendiculaire à la droite Om qui joint l'origine au point m, projection sur xoy du point (a, b, c). On a, en effet, $\frac{y'}{x'}=-\frac{a}{b}$. De plus les deux droites Om et Ot sont dans un rapport constant, car on a $x'^2+y'^2=\frac{r^2}{\lambda^2}(a^2+b^2)$; et l'on voit que l'angle V formé par Om avec mt, a pour tangente $\frac{r}{\lambda}$.

Remarquons encore que le carré de la distance du point M (a, b, c), au point t $\left(\frac{br}{\lambda}\ \frac{-ar}{\lambda},\ o\right)$, est $\left(a-\frac{br}{\lambda}\right)^2+\left(b+\frac{ra}{\lambda}\right)^2+c^2=\frac{(a^2+b^2)(\lambda^2+r^2)+\lambda^2 c^2}{\lambda^2}$; on a donc M$t=\frac{v}{\lambda}$. La vitesse d'un point est donc proportionnelle au segment qui a pour extrémités le point et la trace de la tangente à la trajectoire sur le plan double.

Les formules (1) sont celles de l'homographie qui lie le point (a, b, c) à celui qui a pour coordonnées v_x, v_y, v_z. Le lieu des points du système qui ont des vitesses égales à v, est l'ellipsoïde de révolution

$$(3)\quad (\lambda^2+r^2)(x^2+y^2)+\lambda^2 z^2=v^2.$$

Si v varie, l'ellipsoïde (3) reste concentrique et homothétique à lui-même.

L'intersection de cet ellipsoïde par un plan Π est le lieu des points de ce plan dont la vitesse est égale à v ; si l'on fait varier v, l'ellipse d'intersection reste homothétique et concentrique à elle-même ; elle se réduit à un point quand

Digitized by Google

l'ellipsoïde est tangent au plan, et le point de contact est le point de plus petite vitesse.

Soit le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$, ce point est à l'intersection du plan et de la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + r^2}$.

2. — Les tangentes aux trajectoires des points d'un plan forment une congruence qui devient très simple, comme nous l'avons vu dans l'étude synthétique, quand le plan passe par l'un des sommets du tétraèdre formé par le centre instantané O, par le point à l'infini sur Oz, et par les points cycliques du plan double xOy. Il nous suffira d'étudier le cas où le plan passe par le sommet O de ce tétraèdre.

Soit donc la droite (2) $\frac{x-a}{\lambda a - br} = \frac{y-b}{ar + \lambda b} = \frac{z-c}{\lambda c}$; en la transportant à l'origine, on a $\frac{x}{\lambda a - br} = \frac{y}{ar + \lambda b} = \frac{z}{\lambda c} = \frac{1}{\rho}$; d'où $\rho x = \lambda a - br$; $\rho y = ar + \lambda b$; $\rho z = \lambda c$; ou encore $a = \frac{\rho(\lambda x + ry)}{\lambda^2 + r^2}$; $b = \frac{\rho(\lambda y - rx)}{\lambda^2 + r^2}$; $c = \frac{\rho z}{\lambda}$.

Si le point (a, b, c) se trouve dans le plan $\alpha x - y + \gamma z = o$; le lieu des tangentes aux trajectoires transportées à l'origine est $\alpha(\lambda x + ry) - \lambda(\lambda y - rx) + \gamma(\lambda^2 + r^2) z = o$.

C'est un plan auquel toutes ces droites sont parallèles.

Posons maintenant $a = tc$; $b = \theta c$; ce qui revient à faire décrire au point (a, b, c) une droite D passant par l'origine.

Les équations (2) deviennent $\frac{x - tc}{-r\theta + \lambda t} = \frac{y - \theta c}{rt + \lambda\theta} = \frac{z - c}{\lambda} = \rho$;

d'où : $x = tc + \rho(-r\theta + \lambda t)$; $y = \theta c + \rho(rt + \lambda\theta)$; $z = c + \rho\lambda$.

Eliminant c et ρ, on trouve : $z(t^2 + \theta^2) - tx - \theta y = o$.

Ecrivons maintenant que la droite D se trouve dans le plan $\alpha x - y + \gamma z$; on a : $\alpha t - \theta + \gamma = o$, ou $\theta = \alpha t + \gamma$.

Portons cette valeur de θ dans l'équation $z(t^2 + \theta^2) - tx - \theta y = o$; il vient : $zt^2(\alpha^2 + 1) + t(2\alpha\gamma z - \alpha y - x) + \gamma^2 z - \gamma y = o$.

L'enveloppe de ce plan, où t est un paramètre variable est : $(2\alpha\gamma z - \alpha y - x)^2 - 4(\alpha^2 + 1) z(\gamma^2 z - \gamma y) = o$.

C'est un cône tangent au plan double. Cette équation s'écrit aussi : $(x^2 + y^2)(1 + \alpha^2) = (\alpha x - y + 2\gamma z)^2$; et l'on voit que le cône est aussi tangent

Digitized by Google

aux plans isotropes passant par oz. Enfin, l'équation peut prendre encore la forme, $(\alpha y + x)^2 = 4\gamma z(\alpha x - y + \gamma z)$, qui montre que le cône est aussi tangent au plan $\alpha x - y + \gamma z = o$.

Ainsi, les tangentes aux trajectoires des points situés dans un plan passant par l'origine, sont parallèles à un même plan, et tangentes à un même cône.

Nous avons vu aussi que, lorsque le plan passe par une arête du tétraèdre déjà considéré, la congruence devient linéaire; nous nous bornerons à le démontrer analytiquement dans le cas où le plan passe par l'arête qui est à l'infini dans le plan $x\,Oy$.

Dans les équations (2) $\frac{x-a}{\lambda a - rb} = \frac{y-b}{ra+\lambda b} = \frac{z-c}{\lambda c}$, c est donné.

Coupons cette droite par un plan $z = \delta$; nous avons :

$$x = a + \frac{(\delta - c)(\lambda a - br)}{\lambda c} = \frac{\lambda a\delta + br(c-\delta)}{\lambda c}$$

$$y = b + \frac{(\delta - c)(ra + \lambda b)}{\lambda c} = \frac{ra(\delta - c) + \lambda b\delta}{\lambda c};$$

d'où $\frac{y}{x} = \frac{ar(\delta - c) + \lambda b\delta}{a\lambda\delta + br(c-\delta)}$. Ce rapport est indépendant de a et de b si l'on a $\frac{r(\delta - c)}{\lambda\delta} = \frac{\lambda\delta}{r(c-\delta)}$; ou $\delta = \pm ir\frac{(\delta - c)}{\lambda}$. 1° Soit d'abord $\lambda\delta = +ir(\delta - c)$, ou $\delta = \frac{cr}{r+i\lambda}$; remplaçant dans l'expression de $\frac{y}{x}$, il vient $\frac{y}{x} = \frac{r(\delta - c)(a+ib)}{r(\delta - c)(ai-b)} = -i$

2° $\lambda\delta = -ir(\delta - c)$; d'où $\delta = \frac{cr}{r-i\lambda}$, et $\frac{y}{x} = +i$.

Les droites de la congruence rencontrent donc les deux droites.

$$\begin{cases} z = \frac{cr}{r+i\lambda} \\ y = -ix \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{cr}{r-i\lambda} \\ y = ix. \end{cases}$$

3. — Proposons-nous de trouver le lieu des points d'un plan Π dont les vitesses font un angle donné θ avec la normale à ce plan.

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$, l'équation du plan Π. Le lieu des points dont les vitesses font un angle donné avec la direction déterminée par les cosinus α, β, γ, est le cône $\frac{[\alpha(\lambda x - ry) + \beta(rx + \lambda y) + \lambda\gamma z]^2}{(\lambda^2 + r^2)(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2} = \cos^2\theta$.

Quand on fait varier θ, l'intersection de ce cône avec le plan Π est une conique bitangente à la conique imaginaire, intersection de Π avec le cône $(\lambda^2 + r^2)(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2 = o$, la corde de contact étant l'intersection du plan Π avec le plan $\alpha(\lambda x - ry) + \beta(rx + \lambda y) + \lambda\gamma z = o$.

Digitized by Google

Or, dans ce faisceau de coniques bitangentes, se trouve la conique qui se réduit aux deux tangentes menées aux extrémités de la corde commune de contact; et cette conique singulière est l'intersection du plan Π avec le cône correspondant à la valeur $\theta = o$.

En effet, l'identité de Lagrange montre que l'équation

$$[\alpha(\lambda x - ry) + \beta(rx + \lambda y) + \lambda\gamma z]^2 - [(\lambda^2 + r^2)(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2] = o,$$

dans laquelle $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, se réduit à

$$[r(\alpha x + \beta y) + \lambda(\alpha y - \beta x)]^2 + [\beta\lambda z - \gamma r x - \gamma\lambda y]^2 + [\gamma\lambda x - \gamma r y - \alpha\lambda z]^2 = o.$$

Or ces trois carrés ne sont pas indépendants, car on a identiquement :

$$\alpha(\beta\lambda z - \gamma r x - \gamma\lambda y) + \beta(\gamma\lambda x - \gamma r y - \alpha\lambda z) = -\gamma[r(\alpha x + \beta y) + \lambda(\alpha y - \beta x)].$$

Donc l'équation représente l'ensemble de deux plans, dont l'intersection avec Π donne les deux droites tangentes aux coniques du faisceau. Nous allons voir que ce sont deux droites isotropes du plan Π. Pour cela, ramenons le plan Π à l'origine, et cherchons les intersections du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = o$ avec les deux plans répondant à l'équation

$$[\alpha(\lambda x - ry) + \beta(rx + \lambda y) + \lambda\gamma z]^2 = (\lambda^2 + r^2)(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2,$$

ou $\quad [\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z) + r(\beta x - \alpha y)]^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + r^2(x^2 + y^2)$;

ou encore $r^2(\beta x - \alpha y)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + r^2(x^2 + y^2)$

Cette équation, en vertu de l'identité

$$(\beta x - \alpha y)^2 = (x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = (x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2 z^2,$$

devient successivement :

$$r^2(x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2) - r^2\gamma^2 z^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + r^2(x^2 + y^2);$$

$$r^2(x^2 + y^2)(1 - \gamma^2) - r^2\gamma^2 z^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + r^2(x^2 + y^2);$$

et enfin $(x^2 + y^2 + z^2)(\lambda^2 + r^2\gamma^2) = o$;

et la propriété en question est ainsi mise en évidence.

Il est ainsi démontré que le lieu des points du plan Π, dont les vitesses font avec la normale à ce plan un angle θ, est une conique ; et que lorsque l'angle θ varie, cette conique a pour foyer un point fixe, et une droite fixe pour directrice relative à ce foyer.

On voit sans peine que cette droite est le lieu qui correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que les vitesses de tous ses points sont dans le plan Π. Elle est l'intersection du plan Π et du plan $\alpha(\lambda x - ry) + \beta(rx + \lambda y) + \lambda\gamma z = o$.

Digitized by Google

Quant au foyer, c'est le point du plan Π pour lequel $\theta = o$, c'est-à-dire dont la vitesse est perpendiculaire au plan. On l'appelle le foyer du plan ; il est à l'intersection du plan Π avec la droite commune aux deux plans

$$\gamma r x + \gamma \lambda y - \beta \lambda z = o \; ; \; \gamma \lambda x - \gamma r y - \alpha \lambda z = o \; ;$$

$$\text{ou} \qquad \frac{\lambda x - r y}{\alpha} = \frac{r x + \lambda y}{\beta} = \frac{\lambda z}{\gamma}.$$

Sous cette forme, il apparaît bien que la vitesse du point est perpendiculaire au plan.

La droite $\frac{\lambda x - r y}{\alpha} = \frac{r x + \lambda y}{\beta} = \frac{\lambda z}{\gamma}$, est le lieu des foyers des plans perpendiculaires à la direction (α, β, γ) ; c'est la *droite adjointe* de ces plans. La droite du plan Π, dont tous les points ont leurs vitesses situées dans ce plan, est la *caractéristique* de ce plan ; elle est à l'intersection du plan Π et du plan

$$\alpha(\lambda x - r y) + \beta(r x + \lambda y) + \lambda \gamma z = o$$

C'est le plan adjoint du plan Π ; c'est le lieu géométrique des caractéristiques des plans parallèles à ce plan Π. On peut vérifier que la caractéristique ainsi définie est l'intersection du plan avec sa position infiniment voisine.

En effet, cette droite est commune au plan Π, $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$, et au plan $x(\lambda \alpha - r \beta) + y(r \alpha + \lambda \beta) + \lambda \gamma z - 2 \lambda \delta = o$, dans lequel les coefficients sont, d'après les développements (5) et (5)′ les dérivées des coefficients de Π par rapport au temps. Or, si dans ce second plan nous remplaçons δ par $\alpha x + \beta y + \gamma z$, nous obtenons

$$\alpha(\lambda x - r y) + \beta(r x + \lambda y) + \lambda \gamma z = o,$$

c'est-à-dire l'équation du plan adjoint.

Vitesses des points d'une droite ; foyers ; sphères Φ.

1. — Soit la droite D $\begin{cases} x = m z + \mu \\ y = n z + \nu \end{cases}$ et un point (a, b, c) de cette droite ; la tangente à la trajectoire de ce point a pour équations

$$\frac{x - a}{\lambda a - b r} = \frac{y - b}{r a + \lambda b} = \frac{z - c}{\lambda c}.$$

Il s'agit d'éliminer a, b, c entre ces équations et celles-ci :

$$a = m c + \mu \; ; \quad b = n c + \nu.$$

Digitized by Google

On a d'abord $\begin{cases} \lambda a - br = c(\lambda m - rn) + \lambda\mu - r\nu \\ ra + \lambda b = c(rm + \lambda n) + r\mu + \lambda\nu. \end{cases}$

Portant dans les équations de la tangente, on a :

$$\frac{x - mc - \mu}{c(\lambda m - rn) + \lambda\mu - r\nu} = \frac{y - nc - \nu}{c(rm + \lambda n) + r\mu + \lambda\nu} = \frac{z - c}{\lambda c};$$

d'où :
$$rnc^2 + [z(\lambda m - rn) - \lambda x + r\nu]\,c + (\lambda\mu - r\nu)\,z = o$$
$$rmc^2 - [z(\lambda n + rm) - \lambda y - r\mu]\,c - (r\mu + \lambda\nu)\,z = o$$

Éliminant c, on trouve

$$\frac{z[\mu(\lambda m + rn) + \nu(\lambda n - rm)]}{\lambda(m^2+n^2)z - \lambda(mx+ny) + r(m\nu - n\mu)} = \frac{z(\lambda^2+r^2)(m\nu - n\mu) - \lambda x(r\mu+\lambda\nu) + \lambda y(\lambda\mu - r\nu) + \lambda r(\mu^2+\nu^2)}{r[n(r\mu+\lambda\nu) + m(\lambda\mu - r\nu)]}$$

Ainsi le lieu des tangentes aux trajectoires des points d'une droite D est un paraboloïde hyperbolique.

Si on le coupe par le plan $z = o$, on a les équations

$$\lambda(mx + ny) + r(n\mu - m\nu) = o$$
$$y(\lambda\mu - r\nu) = x(r\mu + \lambda\nu) - r(\mu^2 + \nu^2).$$

qui représentent 2 droites dans le plan des xy.

La première de ces droites est perpendiculaire à la projection de la droite D.

Les distances de l'origine à ces deux droites sont respectivement $\frac{r(n\mu - m\nu)}{\lambda\sqrt{m^2+n^2}}$, et $\frac{n\mu - m\nu}{\sqrt{m^2+n^2}}$; leur rapport est constant. L'intersection de ces deux droites, point de contact du paraboloïde avec le plan xOy, a pour coordonnées $x = \frac{r}{\lambda}\nu$, $y = -\frac{r}{\lambda}\mu$.

Si l'on a : $n(\lambda\nu + r\mu) + m(\lambda\mu - r\nu) = o$,
ou $\lambda(m\mu + n\nu) = r(m\nu - n\mu)$, ce qui a lieu, comme nous le verrons, quand la droite D est tangente à la trajectoire d'un de ses points, le paraboloïde se décompose en deux plans dont les équations sont :

$$P = \lambda(m^2+n^2)z - \lambda(mx + ny) + r(m\nu - n\mu) = o$$
$$Q = z(\lambda^2 + r^2)(m\nu - n\mu) - \lambda x(r\mu + \lambda\nu) + \lambda y(\lambda\mu - r\nu) + \lambda r(\mu^2 + \nu^2) = o.$$

En tenant compte de la relation $\lambda(m\mu + n\nu) = r(m\nu - n\mu)$, la 2e équation devient :

$$mz(\lambda^2 + r^2)(m\nu - n\mu) - \lambda(r\mu + \lambda\nu)(mx + ny) + \lambda mr(\mu^2 + \nu^2) = o.$$

En ajoutant à cette équation l'équation du plan $P = o$, multipliée par $-(r\mu + \lambda\nu)$, on trouve $z = o$. L'intersection des plans P et Q se trouve donc dans le plan xOy.

Digitized by Google

2. — Les tangentes aux trajectoires des divers points d'une droite D étant parallèles à un même plan, comme génératrices d'un paraboloïde, l'enveloppe des plans normaux à ces trajectoires est un cylindre ; nous allons voir que c'est un cylindre parabolique.

L'équation du plan normal à la trajectoire du point (a, b, c) de la droite D est :

$$(x-a)(\lambda a - br) + (y-b)(ar + \lambda b) + (z-c)\lambda c = o$$

ou $$x(\lambda a - br) + y(ar + \lambda b) + \lambda cz - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = o.$$

Remplaçons a par $mc + \mu$, b par $nc + \nu$.

$$x(\lambda mc + \lambda\mu - rnc - rn\nu) + y(rmc + r\mu + \lambda nc + \lambda\nu) + \lambda cz$$
$$-\lambda[m^2c^2 + 2m\mu c + \mu^2 + n^2c^2 + 2n\nu c + \nu^2 + c^2] = o$$

ou $$\lambda c^2(m^2 + n^2 + 1) + c(rnx - \lambda mx - rmy - \lambda ny - \lambda z + 2m\lambda\mu + 2n\lambda\nu)$$
$$+\lambda(\mu^2 + \nu^2) + x(r\nu - \lambda\mu) - y(r\mu + \lambda\nu) = o$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation

$$[x(rn - \lambda m) - y(rm + \lambda n) - \lambda z + 2\lambda(m\mu + n\nu)]^2 - 4\lambda(m^2 + n^2 + 1)[x(r\nu - \lambda\mu) - y(r\mu + \lambda\nu) + \lambda(\mu^2 + \nu^2)] = o$$

Les plans diamétraux de ce cylindre parabolique sont parallèles au plan $x(rn - \lambda m) - y(rm + \lambda n) - \lambda z = o$, dont l'équation est indépendante de μ et de ν ; et qui, par conséquent, est le même pour toutes les droites parallèles. En particulier, si $\mu = \nu = o$, la droite D passe par l'origine, le cylindre se réduit au plan double $[x(rn - \lambda m) - y(rm + \lambda n) - \lambda z]^2 = o$.

Le plan $x(\lambda\mu - r\nu) + y(\lambda\nu + r\mu) - \lambda^2(\mu^2 + \nu^2) = o$ est tangent au cylindre, il passe par le point (μ, ν, o) où la droite D perce le plan xOy ; il ne dépend d'ailleurs que des coordonnées de ce point.

Tous les cylindres relatifs aux droites passant par ce point sont tangents à ce plan, qui est d'ailleurs le plan normal à la trajectoire de ce point.

3. — Il existe sur la droite D un point dont la vitesse est perpendiculaire à la droite ; il est à l'intersection de la droite et du plan

$$m(\lambda x - ry) + n(rx + \lambda y) + \lambda z = o$$

Son équation est indépendante de μ et de ν ; il est donc le même pour toutes les droites parallèles. C'est le plan adjoint relatif aux plans perpendiculaires à la droite.

Quand la droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, c'est-à-dire que l'on a $\lambda(m\mu + n\nu) = r(m\nu - n\mu)$, ou $\frac{\lambda m + rn}{\nu} = \frac{\lambda n - rm}{-\mu}$, l'équation du plan adjoint devient $\nu x - \mu y + \lambda z = o$, et son intersection avec la droite est au point (μ, ν, o), qui est la trace de la droite sur le plan xOy.

Digitized by Google

Nous appellerons *foyer* de la droite, le point que nous venons d'apprendre à déterminer, et dont la vitesse est perpendiculaire à la droite.

Pour qu'une droite eût plus d'un foyer, il faudrait qu'elle fût contenue dans le plan adjoint, c'est-à-dire que l'équation

$$(\lambda m + rn)(mz + \mu) + (\lambda n - rm)(nz + \nu) + \lambda z = o$$

fût satisfaite pour plus d'une valeur de z, ce qui exige que l'on ait

$$m(\lambda m + rn) + n(\lambda n - rm) = o$$
$$\mu(\lambda m + rn) + \nu(\lambda n - rm) = o$$

ou encore

$$\lambda(m^2 + n^2 + 1) = o$$
$$\lambda(m\mu + n\nu) + r(n\mu - m\nu) = o$$

La première relation montre que la droite rencontre le cercle de l'infini ; la seconde, que la droite appartient au complexe des vitesses. Il n'existe donc pas de droite réelle qui soit, comme dans les systèmes invariables, perpendiculaire à la vitesse de chacun de ses points. On peut d'ailleurs s'en rendre compte aisément : un segment AB dont les extrémités A et B décrivent des trajectoires perpendiculaires à AB, a une longueur invariable au second ordre près, ce qui est inconciliable avec la condition que nous avons admise, $\lambda \leqq o$.

4. — Le lieu des foyers de toutes les droites qui passent par un point donné (x_0, y_0, z_0) s'obtient en éliminant m et n entre les trois équations

$$x - x_0 = m(z - z_0) \; ; \; y - y_0 = n(z - z_0)$$

et

$$x(\lambda m + rn) + y(\lambda n - rm) + \lambda z = o.$$

On obtient :

$$\frac{x}{z - z_0}\Big[\lambda(x - x_0) + r(y - y_0)\Big] + \frac{y}{z - z_0}\Big[\lambda(y - y_0) - r(x - x_0)\Big] + \lambda z = o$$

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) - (\lambda x_0 + r y_0)x - (\lambda y_0 - r x_0)y - \lambda z_0 z = o.$$

C'est la *sphère* Φ relative au point (x_0, y_0, z_0).

On trouve la même sphère comme lieu des foyers des plans qui passent par le point (x_0, y_0, z_0).

Soit en effet, le plan

$$(X - x)(\lambda x - ry) + (Y - y)(rx + \lambda y) + \lambda z(Z - z) = o$$

qui a pour foyer le point (x, y, z). S'il passe par le point (x_0, y_0, z_0), on a la relation

$$(x_0 - x)(\lambda x - ry)(y_0 - y) + (rx + \lambda y) + \lambda z(z_0 - z) = o,$$

qui est l'équatiou de la sphère Φ.

Digitized by Google

Toute sphère qui passe par l'origine est une sphère Φ; on peut, en effet, identifier les équations. J'appelle *foyer* de la sphère Φ le point (x_0, y_0, z_0), dont la vitesse est normale à la sphère et dont cette même vitesse, divisée par λ, représente le diamètre de cette sphère. Les coordonnées du foyer sont liées à celles (ξ, η, ζ) du centre par les relations

$$\xi = \frac{\lambda x_0 + r y_0}{2\lambda}, \quad \eta = \frac{\lambda y_0 - r x_0}{2\lambda}; \quad \zeta = \frac{z_0}{2}.$$

L'équation de la sphère peut s'écrire

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - x x_0 - y y_0 - z z_0) + r(y x_0 - x y_0) = o;$$

si on la coupe par le plan qui passe par l'axe Oz et le foyer (x_0, y_0, z_0), on obtient le même cercle qu'en coupant par ce plan la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - x x_0 - y y_0 - z z_0.$$

Cette section est donc indépendante de $\frac{r}{\lambda}$.

Les sphères Φ relatives à tous les points d'un plan passent par le foyer du plan ; celle qui est relative à ce foyer est tangente au plan. Les sphères Φ relatives à tous les points d'une droite passent par un même cercle qui rencontre la droite en son foyer ; ce cercle est aussi le lieu des foyers des plans qui passent par la droite. Le plan de ce cercle est le plan adjoint aux plans perpendiculaires à la droite.

Courbes normales aux trajectoires de tous leurs points. — Sphères S ; système focal ; cercles C ; cercles conjugués.

1. — La sphère Φ et son foyer se sont présentés à nous comme les analogues du plan et de son foyer dans le déplacement d'un système invariable. Cependant la sphère Φ ne jouit pas de la propriété essentielle du système focal, car les sphères Φ relatives aux divers points d'une sphère Φ donnée, ne passent pas par le foyer de cette sphère. Nous verrons que cette propriété appartient à une autre sphère, la sphère S, dont le centre est, dans le plan double xOy, la trace de la tangente à la trajectoire d'un point φ de sa surface, qui est son foyer. Son rayon est donc égal au diamètre de la sphère Φ relative au point φ, et elle est tangente à cette sphère.

Proposons-nous d'abord de trouver les courbes normales aux trajectoires de tous leurs points.

Soit (x, y, z) un point de cette courbe ;

Digitized by Google

On doit avoir

$$(\lambda x - ry)\,dx + (rx + \lambda y)\,dy + \lambda z.\,dz = o,$$

$$\text{ou,} \quad (1) \qquad \frac{\lambda}{2r}\,d\,(x^2 + y^2 + z^2) = y dx - y dy.$$

En passant aux coordonnées polaires, $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$, l'équation (1) devient

$$\frac{\lambda}{r}\,d\rho = -\rho \sin^2\theta\, d\varphi\,;$$

et si l'on adjoint à cette équation celle d'une surface, on a les courbes jouissant de la propriété énoncée, et tracées sur cette surface.

Il y a deux cas très simples où l'intégration se ramène aux quadratures ; c'est d'abord le cas d'une surface de révolution autour de Oz, où l'on a $\rho = f(\theta)$, et le cas d'un cône ayant O pour sommet, où l'on a $\varphi = f(\theta)$.

Un troisième cas remarquable est celui où la courbe est plane. La géométrie montre aisément que la courbe est alors, en général, une spirale logarithmique.

Soit, en effet, un point M de la courbe située dans le plan Π dont le foyer est F ; la projection sur ce plan de la tangente à la trajectoire du point M est perpendiculaire à la tangente de la courbe en ce point ; et comme la projection de la tangente à la trajectoire fait avec MF un angle constant, il en est de même de l'angle formé avec MF par la tangente à la courbe. Cette courbe est donc une spirale logarithmique.

Mais quand le plan Π est perpendiculaire au plan double xOy, la projection de la tangente à la trajectoire passe par F, qui est alors dans le plan double, et la tangente à la courbe étant perpendiculaire au rayon MF, la courbe est un cercle.

2. — Les équations d'un tel cercle peuvent s'écrire :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x = m\,(x^2 + y^2 + z^2) + \mu \\ y = n\,(x^2 + y^2 + z^2) + \nu \end{array} \right.$$

Substituons ces expressions de x et y dans l'équation différentielle (1) ; il vient :

$$\frac{\lambda}{2r}\,d\,(x^2 + y^2 + z^2) = mn\,(x^2 + y^2 + z^2)\,d\,(x^2 + y^2 + z^2) + m\nu d\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- mn\,(x^2 + y^2 + z^2)\,d\,(x^2 + y^2 + z^2) - n\mu d\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{ou} \qquad \frac{\lambda}{2r}\,d\,(x^2 + y^2 + z^2) = (m\nu - n\mu)\,d\,(x^2 + y^2 + z^2)\,;$$

$$\text{ou enfin} \quad (3) \qquad m\nu - n\mu = \frac{\lambda}{2r}$$

Nous désignerons par la lettre γ tout cercle défini par les équations (2) ; si,

Digitized by Google

de plus, les coefficients de ces équations satisfont à la relation (3), nous désignerons le cercle par la lettre C.

Cherchons le lieu des cercles C qui passent par un point donné (x_0, y_0, z_0).

Posons $\quad x^2+y^2+z^2=\rho^2, \qquad x_0^2+y_0^2+z_0^2=\rho_0^2$

On a $\quad \begin{cases} x_0=m\rho_0^2+\mu \\ y_0=n\rho_0^2+\nu \end{cases} \qquad \begin{cases} x=m\rho^2+\mu \\ y=m\rho^2+\nu \end{cases}$

$$x-x_0=m(\rho^2-\rho_0^2), \quad m=\frac{x-x_0}{\rho^2-\rho_0^2}, \quad \mu=x-\frac{x-x_0}{\rho^2-\rho_0^2}\rho^2$$

$$y-y_0=n(\rho^2-\rho_0^2), \quad n=\frac{y-y_0}{\rho^2-\rho_0^2}, \quad \nu=y-\frac{y-y_0}{\rho^2-\rho_0^2}\rho^2$$

Portons ces valeurs de m, n, μ, ν dans la relation (3).

$$\frac{x-x_0}{\rho^2-\rho_0^2}\left(y-\frac{y-y_0}{\rho^2-\rho_0^2}\rho^2\right)-\frac{y-y_0}{\rho^2-\rho_0^2}\left(x-\frac{x-x_0}{\rho^2-\rho_0^2}\rho^2\right)=\frac{\lambda}{2r};$$

$$\frac{y(x-x_0)}{\rho^2-\rho_0^2}-\frac{x(y-y_0)}{\rho^2-\rho_0^2}=\frac{\lambda}{2r};$$

d'où $\quad$ (4) $\quad x^2+y^2+z^2-\frac{2r}{\lambda}(xy_0-yx_0)-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=0.$

C'est la sphère S dont il a été parlé plus haut, et dont le point (x_0, y_0, z_0) est le foyer φ. Toute sphère qui a son centre dans le plan xOy est une sphère S, mais son foyer n'est pas toujours réel. Identifions, en effet, avec l'équation (4) l'équation $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0$.

On a $\quad \alpha=\frac{r}{\lambda}y_0, \quad \beta=-\frac{r}{\lambda}x_0; \quad R^2-\alpha^2-\beta^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2.$

Des deux premières relations on tire $x_0=-\frac{\lambda}{r}\beta$, $y_0=\frac{\lambda}{r}\alpha$; portant dans la 3me, on a $z_0^2=R^2-\frac{\lambda^2+r^2}{r^2}(\alpha^2+\beta^2)$; et si l'on a $\frac{R^2}{\alpha^2+\beta^2}>\frac{\lambda^2+r^2}{r^2}$, on obtient pour z_0 deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Il y a donc en général, pour une sphère S, deux foyers symétriques par rapport au plan xOy.

Nous allons voir que toutes les sphères S qui ont pour foyers les divers points d'une sphère S donnée, passent par les deux foyers de cette sphère.

Soit, en effet, une sphère donnée S, dont le foyer est φ, (x_0, y_0, z_0), et soit aussi un point (x_1, y_1, z_1) de cette sphère. Ce point étant sur la sphère donnée, on a $x_1^2+y_1^2+z_1^2-\frac{2r}{\lambda}(x_1y_0-y_1x_0)-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=0.$

Mais la sphère qui a pour foyer le point (x_1, y_1, z_1) a pour équation

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2r}{\lambda}(xy_1-yx_1)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=0;$$

Digitized by Google

et la relation précédente montre que le point (x_0, y_0, z_0) est sur cette sphère

La sphère S apparaît donc bien comme l'analogue du plan normal dans le déplacement d'un système invariable, et les cercles C correspondent de même aux normales. Les propriétés suivantes vont développer l'analogie.

On sait que, dans le déplacement d'un système invariable, le lieu des foyers de tous les plans qui passent par une droite est sa droite conjuguée ; nous allons voir que le lieu des foyers des sphères S qui passent par un cercle γ, est un cercle γ'.

3. — Soit donc le cercle $\begin{cases} x = m(x^2+y^2+z^2)+\mu \\ y = n(x^2+y^2+z^2)+\nu \end{cases}$

L'équation d'une sphère passant par ce cercle

est $\quad m(x^2+y^2+z^2) - x + \mu + K[n(x^2+y^2+z^2) - y + \nu] = o$

ou $\quad (x^2+y^2+z^2)(m+Kn) - x - Ky + \mu + K\nu = o.$

Identifions avec l'équation de la sphère S :

$$x^2+y^2+z^2 - \frac{2r}{\lambda}y_0 x + \frac{2r}{\lambda}x_0 y - (x_0^2+y_0^2+z_0^2) = o;$$

il vient $\quad (5)\ \dfrac{1}{m+Kn} = \dfrac{2ry_0}{\lambda}$; $(6)\ \dfrac{K}{m+Kn} = -\dfrac{2rx_0}{\lambda}$; d'où $K = -\dfrac{x_0}{y_0}$

$m + Kn = m - \dfrac{nx_0}{y_0} = \dfrac{my_0 - nx_0}{y_0}$; portant cette valeur dans la relation (5),

on a $\dfrac{y_0}{my_0 - nx_0} = \dfrac{2ry_0}{\lambda}$ ou $(7)\ my_0 - nx_0 = \dfrac{\lambda}{2r}$

L'identification donne aussi $\dfrac{\mu + K\nu}{m+Kn} = -(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$.

Or, $\quad m + Kn = \dfrac{my_0 - nx_0}{y_0}$; $\mu + K\nu = \dfrac{\mu y_0 - \nu x_0}{y_0}$;

donc $\quad \dfrac{\mu y_0 - \nu x_0}{my_0 - nx_0} = -(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$, relation qui, en vertu de (7)

devient $-\dfrac{2r}{\lambda}(\mu y_0 - \nu x_0) = x_0^2+y_0^2+z_0^2.$

Ainsi le lieu des foyers des sphères S qui passent par le cercle γ a pour équations

$$\begin{cases} my - nx = \dfrac{\lambda}{2r} \\ x^2+y^2+z^2 + \dfrac{2r}{\lambda}(\mu y - \nu x) = o \end{cases}$$

Nous allons mettre ces équations sous une forme analogue à γ. De la première on tire $\quad y = \dfrac{n}{m}x + \dfrac{\lambda}{2rm}$; portons dans la seconde :

Digitized by Google

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2r}{\lambda}\frac{\mu n}{m}x-\frac{2r\nu}{\lambda}x+\frac{\mu}{m}=o$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{d'où} & x=\dfrac{\lambda}{2r(m\nu-n\mu)}\left[m(x^2+y^2+z^2)+\mu\right]\\ \text{de même} & y=\dfrac{\lambda}{2r(m\nu-n\mu)}\left[n(x^2+y^2+z^2)+\nu\right]\end{array}\right\}(\gamma')$$

Remarquons que si l'on a $m\nu-n\mu=\frac{\lambda}{2r}$, les équations (γ') se confondent avec les équations (γ), ce qui montre qu'un cercle C se correspond à lui-même.

Écrivons les équations (γ') sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}x=m'(x^2+y^2+z^2)+\mu'\\ y=n'(x^2+y^2+z^2)+\nu';\end{array}\right.$$

et désignons $\frac{\lambda}{2r}$ par K, $m\nu-n\mu$ par ω, $m'\nu'-n'\mu'$ par ω' ;

on a les relations

$$\frac{\omega'}{K}\cdot\frac{\omega}{K}=1,\quad m'=\frac{K}{\omega}m,\quad n'=\frac{K}{\omega}n,\quad \mu'=\frac{K}{\omega}\mu,\quad \nu'=\frac{K}{\omega}\nu$$

ou encore, $m=\frac{K}{\omega'}m'$, $n=\frac{K}{\omega'}n'$, $\mu=\frac{K}{\omega'}\mu'$, $\nu=\frac{K}{\omega'}\nu'$.

D'où l'on voit que les cercles γ et γ' sont conjugués, c'est-à-dire que, si l'on cherche le lieu des pôles des sphères S qui passent par γ' on trouve γ.

Remarquons encore que les plans des cercles γ et γ' sont parallèles, de même que, dans le déplacement d'un système invariable, les projections de deux droites conjuguées sur un plan perpendiculaire à l'axe central sont parallèles.

L'analogie se poursuit dans les propriétés suivantes.

Tout cercle γ_1 qui rencontre deux cercles conjugués γ et γ', est un cercle C.

Soient, en effet, les équations

$$(\gamma)\left\{\begin{array}{l}x=m(x^2+y^2+z^2)+\mu\\ y=n(x^2+y^2+z^2)+\nu\end{array}\right.\qquad(\gamma)'\left\{\begin{array}{l}x=m'(x^2+y^2+z^2)+\mu'\\ y=n'(x^2+y^2+z^2)+\nu'\end{array}\right.$$

$$\gamma_1\left\{\begin{array}{l}x=m_1(x^2+y^2+z^2)+\mu_1\\ y=n_1(x^2+y^2+z^2)+\nu_1\end{array}\right.$$

On en tire
$$m(x^2+y^2+z^2)+\mu=m_1(x^2+y^2+z^2)+\mu_1$$
$$n(x^2+y^2+z^2)+\nu=n_1(x^2+y^2+z^2)+\nu_1$$

d'où
$$(x^2+y^2+z^2)(m_1-m)=\mu-\mu_1$$
$$(x^2+y^2+z^2)(n_1-n)=\nu-\nu_1$$

et
$$\frac{m_1-m}{n_1-n}=\frac{\mu-\mu_1}{\nu-\nu_1}$$

ou
$$m_1\nu+m\nu_1=\mu n_1+n\mu_1+(m\nu-n\mu)+(m_1\nu_1-n_1\mu_1)$$

Digitized by Google

Comme $\omega = m\nu - n\mu$ et $\omega_1 = m_1\nu_1 - n_1\mu_1$, on a la relation

$$(\alpha)\quad m_1\nu + m\nu_1 = \mu n_1 + n\mu_1 + \omega + \omega_1\,;$$

de même $$m_1\nu' + m'\nu_1 = \mu' n_1 + n'\mu_1 + \omega' + \omega_1$$

ou $$m_1\frac{K\nu}{\omega} + \nu_1\frac{Km}{\omega} = n_1\frac{K\mu}{\omega} + \mu_1\frac{Kn}{\omega} + \frac{K^2}{\omega} + \omega_1$$

ou encore $$(\beta)\quad m_1\nu + m\nu_1 = \mu n_1 + n\mu_1 + K + \frac{\omega\omega_1}{K}$$

Retranchant (α) et (β), on a $$\omega + \omega_1 = K + \frac{\omega\omega_1}{K}$$

ou $$(\omega_1 - K)(\omega - K) = o\,;$$

et, comme $K \gtrless \omega$, on a $\omega_1 = K$, et le cercle γ_1 est un cercle C.

Un cercle C *qui rencontre un cercle* γ, *rencontre aussi son conjugué* γ'. — Soit, en effet, le cercle C

$$(C)\quad \begin{cases} x = m_1(x^2+y^2+z^2) + \mu_1 \\ y = n_1(x^2+y^2+z^2) + \nu_1 \end{cases} \qquad m_1\nu_1 - n_1\mu_1 = \omega_1 = K$$

S'il rencontre le cercle γ_1

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x = m(x^2+y^2+z^2) + \mu \\ y = n(x^2+y^2+z^2) + \nu, \end{cases}$$

on a $$m_1\nu + m\nu_1 = \mu n_1 + n\mu_1 + \omega + K,$$

ou $$m_1\frac{K\nu}{\omega} + \nu_1\frac{Km}{\omega} = n_1\frac{K\mu}{\omega} + \mu_1\frac{Kn}{\omega} + K + \frac{K^2}{\omega}$$

ou encore $$m_1\nu' + \nu_1 m' = n_1\mu' + \mu_1 n' + K + \omega',$$

relation qui exprime que le cercle C rencontre le cercle γ'.

Soit maintenant deux cercles γ'' et γ, et proposons-nous de trouver le lieu des cercles C qui rencontrent à la fois γ'' et γ. Chacun de ces cercles C rencontrera le cercle γ' conjugué de γ ; il suffira donc d'exprimer que le cercle C rencontre les trois cercles γ, γ', γ''

$$(\gamma)\begin{cases} x = m(x^2+y^2+z^2) + \mu \\ y = n(x^2+y^2+z^2) + \nu \end{cases} \quad (\gamma')\begin{cases} x = m'(x^2+y^2+z^2) + \mu' \\ y = n'(x^2+y^2+z^2) + \nu' \end{cases} \quad (\gamma'')\begin{cases} x = m''(x^2+y^2+z^2) + \mu'' \\ y = n''(x^2+y^2+z^2) + \nu'' \end{cases}$$

Si l'on pose $Z = x^2 + y^2 + z^2$, les équations des cercles prennent la forme d'équations de droites, et comme l'on sait que la surface engendrée par une droite qui en rencontre trois autres est une quadrique, le lieu cherché aura une équation de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''Z^2 + 2B'yZ + 2B'Zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''Z + D = o,$$

ou $$A''(x^2+y^2+z^2)^2 + 2(B'x + By + C'')(x^2+y^2+z^2) + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + D = o.$$

Digitized by Google

Nous obtenons ainsi une cyclide bicirculaire du quatrième ordre, ayant le plan yOx comme plan de symétrie.

Cette cyclide passe aussi par le cercle conjugé de γ'', puisqu'elle est engendrée par un cercle C qui rencontre γ'' ; on peut donc dire que deux couples de cercles conjugués appartiennent à une même cyclide bicirculaire ayant le plan yOx comme plan de symétrie.

Correspondance entre un plan et son foyer.

1. — Soit (a, b, c) le foyer du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$; en identifiant cette équation avec $(\lambda a - br)(x - a) + (\lambda b + ar)(y - b) + \lambda c z = o$, on obtient

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\lambda a - br}{\lambda(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \frac{\beta}{\delta} \frac{ar + \lambda b}{\lambda(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda c}{\lambda(a^2 + b^2 + c^2)},$$

$$\text{et } (2) \; a = \frac{\lambda\delta(\lambda\alpha + r\beta)}{\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + r^2\gamma^2}, \; b = \frac{\lambda\delta(\lambda\beta - r\alpha)}{\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + r^2\gamma^2}, \; c = \frac{\gamma\delta(\lambda^2 + r^2)}{\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + r^2\gamma^2}$$

C'est une correspondance quadratique, que nous allons étudier.

Soit $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = o$ l'équation tangentielle homogène de la surface enveloppée par le plan ; on obtient la surface décrite par le foyer du plan, en substituant dans f, aux coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les expressions $\lambda a - br$, $ar - \lambda b$, λc, $\lambda(a^2 + b^2 + c^2)$. On aperçoit d'abord ici une analogie avec la manière dont on passe à l'équation ponctuelle d'une surface anallagmatique, de l'équation tangentielle de la déférente, et particulièrement dans le cas d'une anallagmatie singulière, où la sphère directrice a un rayon nul.

Soit, en effet, à trouver l'enveloppe d'une sphère passant par l'origine, et dont le centre décrit la surface dont l'équation tangentielle est $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = o$; la question revient à trouver la podaire du lieu du centre de la sphère, par rapport à l'origine, car cette podaire est homothétique de l'enveloppe cherchée, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$.

Soient donc $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ les équations de la perpendiculaire menée de l'origine au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$

On a $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha x + \beta y + \gamma z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\delta}$

Il suffit donc de remplacer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$, dans l'équation tangentielle de la surface pour avoir l'équation ponctuelle de la podaire. On aura enfin l'enveloppe de la sphère en substituant dans cette équation ponc-

Digitized by Google

tuelle, à x, y, z : $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$; ce qui revient à remplacer dans l'équation tangentielle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, respectivement par $x, y, z, \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$.

Il est alors naturel de rapprocher ce résultat de cette considération que l'on obtient le lieu des foyers des plans qui enveloppent la surface $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = o$, en effectuant la substitution que nous venons d'indiquer dans l'équation tangentielle $f(\lambda\alpha - r\beta, r\alpha + \lambda\beta, \lambda\gamma, 2\delta) = o$.

Nous avons donc à interpréter cette équation tangentielle.

Remarquons pour cela que l'homographie qui fait correspondre le centre (ξ, η, ζ) d'une sphère Φ, et le foyer de cette sphère, est définie par les relations $2\xi = \lambda x + ry$, $2\eta = \lambda y - rx$, $2\zeta = \lambda z$; d'où il résulte entre les coordonnées de plans des deux figures homographiques, les relations :

$$\alpha' = \lambda\alpha - r\beta,\ \beta' = \lambda\alpha + r\beta,\ \gamma' = \lambda\gamma,\ \delta' = 2\delta.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se rapportent à la figure dont les coordonnées ponctuelles sont ξ, η, ζ ; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ à la figure dont les coordonnées ponctuelles sont x, y, z.

On voit alors que l'équation $f(\lambda\alpha - r\beta, r\alpha + \lambda\beta, \lambda\gamma, 2\delta) = o$ est la transformée de l'équation $f(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = o$, c'est donc l'équation tangentielle de la surface que décrit le centre de la sphère Φ quand le foyer de cette sphère décrit l'enveloppe du plan dont le foyer est le point (a, b, c).

Par conséquent *la surface* $f(\lambda x - ry, rx + \lambda y, \lambda z, x^2 + y^2 + z^2) = o$ *est en même temps le lieu des foyers des plans qui enveloppent la surface* $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = o$, *et l'enveloppe des sphères* Φ *dont les foyers décrivent cette même surface.*

Nous allons retrouver ce résultat en montrant que *lorsque le foyer d'un plan décrit une surface* H, *le point où le plan touche son enveloppe est le foyer de la sphère* Φ *qui passe par le foyer du plan, et touche la surface* H *en ce point.*

En effet, l'équation du plan qui a pour foyer le point (a, b, c) peut s'écrire :
$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) - (\lambda x + ry)a + (rx - \lambda y)b - \lambda zc = o$,

Le point (a, b, c) décrivant la surface H, soient $a + da$, $b + db$, $c + dc$, les coordonnées d'un point infiniment voisin de a, b, c, sur cette surface. Le point (x, y, z) où le plan touche son enveloppe s'obtient en joignant à l'équation précédente l'équation :

$$2\lambda(a\,da + b\,db + c\,dc) - (\lambda x + ry)\,da + (rx - \lambda y)\,db - \lambda z dc = o\,;$$

cette équation, dans laquelle c peut être considéré comme variable indépendante, équivalant en réalité à deux équations.

Or, si nous considérons la sphère Φ relative au point (x, y, z), l'équation

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) - (\lambda x + ry)a + (rx - \lambda y)b - \lambda zc = o$$

Digitized by Google

exprime que le point a, b, c est sur cette sphère, et l'équation

$$2\lambda(a\,da + b\,db + c\,dc) - (\lambda x + ry)\,da + (rx - \lambda y)\,db - \lambda z\,dc = o,$$

jointe à la première, exprime que tout point infiniment voisin de (a, b, c) sur la surface H, est aussi sur cette sphère, qui se trouve ainsi tangente à la surface A au point (a, b, c).

La géométrie donne à son tour une explication très simple.

Coupons la surface H par une sphère Φ ; les plans dont les foyers sont sur la courbe d'intersection, passent tous par le foyer de la sphère, et forment un cône circonscrit à l'enveloppe du plan. Si la courbe d'intersection se réduit à un point, le cône se réduit à un plan qui touche l'enveloppe au foyer de la sphère.

2. — Nous allons étudier avec quelque détail le cas où le lieu des foyers est un plan.

Soit le plan $Ax + By + Cz - D = o$: faisons dans cette équation la substitution :

$$a = \frac{\lambda\delta(\lambda\alpha + r\beta)}{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2},\ b = \frac{\lambda\delta(\lambda\beta - r\alpha)}{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2},\ c = \frac{\delta\gamma(\lambda^2 + r^2)}{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2}$$

$$A\lambda\delta(\lambda\alpha + r\beta) + B\lambda\delta(\lambda\beta - r\alpha) + C\delta\gamma(\lambda^2 + r^2) - D\left[\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2\right] = o,$$

équation tangentielle d'un *paraboloïde*, car elle est satisfaite par $\alpha = \beta = \gamma = o$. En mettant l'équation sous la forme

$$\delta\left[A\lambda(\lambda\alpha + r\beta) + B\lambda(\lambda\beta - r\alpha) + C\gamma(\lambda^2 + r^2)\right] - D\left[\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2\right] = o,$$

on voit qu'elle est satisfaite pour $\delta = o$, $\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2 = o$; et ce sont les équations du cône circonscrit ayant pour sommet l'origine. Elle est aussi satisfaite par

$$A\lambda(\lambda\alpha + r\beta) + B\lambda(\lambda\beta - r\alpha) + C\gamma(\lambda^2 + r^2) = o, \text{ et } \lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma^2 = o.$$

La première équation est celle d'un point à l'infini, la seconde, d'une courbe à l'infini, et l'ensemble est le cône ayant pour sommet le point, et circonscrit suivant la courbe. Comme le point est dans le plan de la courbe, ce cône se compose des deux droites qui sont les génératrices du paraboloïde dans le plan de l'infini. Il est aisé de voir qu'elles sont imaginaires, et le paraboloïde est elliptique.

On arrive à la même conclusion en observant que le lieu des centres des sphères Φ tangentes au plan est un paraboloïde de révolution qui a pour foyer l'origine, et le plan pour plan directeur. Le paraboloïde dont nous avons trouvé l'équation se déduit du paraboloïde de révolution par l'homographie qui fait correspondre le foyer de la sphère Φ à son centre.

Le cône isotrope qui a pour sommet l'origine est circonscrit à tous les para-

Digitized by Google

boloïdes de révolution relatifs à tous les plans du système ; ce qui explique pourquoi tous les paraboloïdes enveloppes des plans focaux des points d'un plan quelconque sont inscrits au cône $\lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+r^2\gamma^2=o$ qui est le transformé homographique du cône isotrope.

3. — Il est intéressant d'étudier la manière dont se correspondent un point M d'un plan donné Π, et le point M′ où le plan qui a le point M pour foyer touche le paraboloïde Π' qu'il enveloppe. Ce point M′ est d'ailleurs le foyer de la sphère Φ tangente en M au plan Π.

Si les points M sont sur un cercle du plan Π, les points correspondants M′ sont sur une section plane du paraboloïde Π' ; cette section plane est la courbe de contact du cône circonscrit au paraboloïde, qui a pour sommet le foyer de la sphère Φ passant par le cercle. Le rayon du cercle devenant nul, on voit que les droites isotropes du plan et les génératrices du paraboloïde se correspondent. Quant aux droites réelles du plan, nous verrons qu'elles correspondent aux paraboles du paraboloïde.

Si l'on considère la sphère Φ tangente au plan en son foyer, la vitesse de ce point étant normale au plan, est aussi normale à la sphère, et, par conséquent, est aussi son foyer. Les génératrices du paraboloïde en ce point se confondent avec les droites isotropes du plan, et ce point est ainsi un ombilic du paraboloïde. Il en résulte que les plans focaux d'un même cercle du plan Π, étant les plans tangents d'un cône circonscrit, leurs traces sur le plan Π enveloppent une conique ayant un foyer au foyer du plan. C'est ce dont on peut se rendre compte directement, car, si un plan a pour foyer un point M du plan P, sa trace sur ce plan est perpendiculaire à la projection de la vitesse de M, et, par conséquent, fait un angle constant avec la droite qui joint le point M au foyer du plan. Si donc le point M décrit un cercle, la trace du plan focal enveloppe une conique dont un foyer est le foyer du plan, l'autre foyer étant le centre du cercle ; si le point M décrit une droite, la trace du plan focal enveloppe une parabole.

La correspondance entre les figures du plan et du paraboloïde apparaît plus nettement quand on s'attache à celle qui existe entre le plan et le paraboloïde de révolution Π_1, lieu des sphères Φ tangentes au plan ; il n'y a plus ensuite qu'à passer du paraboloïde Π_1 au paraboloïde Π' par l'homographie si simple qui relie le centre de la sphère à son foyer. Or il est évident que tout point du plan est la projection orthogonale du centre de la sphère qui touche le plan en ce point. Cette projection orthogonale pouvant être considérée comme une projection centrale dont le point de vue serait à l'infini sur le paraboloïde de révolution Π_1 ; comme d'ailleurs ce point à l'infini est un

Digitized by Google

ombilic, et que le plan Π est parallèle au plan tangent à cet ombilic. cette projection présente des caractères très analogues à ceux de la projection stéréographique de la sphère. Ainsi les sections planes non parallèles à l'axe se projettent suivant des cercles, et le centre de chaque cercle est la projection du sommet du cône circonscrit suivant la section. Une conséquence de cette dernière propriété est que deux sections conjuguées du paraboloïde Π_1 se projettent sur le plan Π suivant deux cercles orthogonaux ; et, comme Π' et Π_1 sont homographiques, on voit que deux cercles orthogonaux du plan correspondent à deux sections conjuguées du paraboloïde Π'.

Nous avons là, en somme, une représentation bien connue d'une quadrique sur un plan. Remarquons, en terminant, qu'une quartique bicirculaire du plan correspond à l'intersection du paraboloïde Π' par un cône, ou plus plus généralement, par une surface du second ordre.

En substituant au plan Π une sphère, on est conduit à des résultats analogues. Les plans focaux de tous les points de la sphère enveloppent une quadrique homographique d'une quadrique de révolution ayant pour foyers l'origine, et le centre de la sphère. Un point de la sphère, et le point où son plan focal touche son enveloppe, se correspondent homographiquement.

Correspondance entre un point et un plan conjugués.

1. — J'appelle ainsi un point et un plan tels que la vitesse du point soit la caractéristique du plan.

La tangente à la trajectoire du point (a, b, c) a pour équations

$$\frac{x-a}{-br+\lambda a}=\frac{y-b}{ar+\lambda b}=\frac{z-c}{\lambda c},$$

ou (1) $$x=\frac{-br+\lambda a}{\lambda c}z+\frac{br}{\lambda};\ y=\frac{ar+\lambda b}{\lambda c}z-\frac{ar}{\lambda}.$$

De même la caractéristique du plan $\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=o$ a pour équations : $\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=o$; $\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z-\delta_1=o$; et en remplaçant $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ par leurs valeurs tirées des développements des coordonnées d'un plan, on a

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=o \\ (\lambda\alpha-r\beta)x+(r\alpha+\lambda\beta)y+\lambda\gamma z-2\lambda\delta=o \end{cases}$$

La dernière équation s'écrit $\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta)-r\beta x+r\alpha y-\lambda\delta=o$,

ou encore $$r\beta x-r\alpha y+\lambda\delta=o.$$

Digitized by Google

On peut alors mettre les équations de la caractéristique sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} x(\alpha^2+\beta^2) = -\alpha\gamma z + \delta\left(\alpha - \frac{\lambda}{r}\beta\right) \\ y(\alpha^2+\beta^2) = -\beta\gamma z + \delta\left(\beta + \frac{\lambda}{r}\alpha\right) \end{cases}$$

Identifiant les équations (1) et (2), on a les systèmes suivants qui expriment les coordonnées du point en fonction de celles du plan, et réciproquement.

$$(3)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{\lambda\delta(r\beta+\lambda\alpha)}{r^2(\alpha^2+\beta^2)} \\ b = \dfrac{\lambda\delta(r\alpha-\lambda\beta)}{r^2(\alpha^2+\beta^2)} \\ c = \dfrac{\delta(r^2+\lambda^2)}{r^2\gamma} \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{\lambda\delta(-br+\lambda a)}{r^2(a^2+b^2)} \\ \beta = -\dfrac{\lambda\delta(ar+\lambda b)}{r^2(a^2+b^2)} \\ \gamma = \dfrac{\delta(r^2+\lambda^2)}{r^2 c} \end{cases}$$

Les dernières équations des deux groupes montrent que c et $\frac{\gamma}{\delta}$ dépendent exclusivement l'un de l'autre, en sorte que si le point (a, b, c) décrit un plan parallèle à xOy, le plan conjugué passe par un point fixe de l'axe Oz ; mais on sait que dans ce cas les vitesses des points (a, b, c) rencontrent deux droites fixes ; il en est donc de même des caractéristiques des plans qui passent par un point fixe de l'axe Oz.

Les équations (3) et (4) établissent entre (a, b, c) et $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ une correspondance quadratique que nous allons interpréter géométriquement.

Remarquons d'abord que $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ sont les coordonnées du pôle du plan relativement à la sphère $x^2+y^2+z^2-1=o$; tout revient donc à considérer la correspondance qui existe entre les *points* (a, b, c) et $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$

Des deux premières équations du groupe (4), on tire :

$$(5)\quad \left(\frac{\alpha^2}{\delta^2}+\frac{\beta^2}{\delta^2}\right)(a^2+b^2) = \frac{\lambda^2(\lambda^2+r^2)}{r^4}$$

et $$\frac{\frac{\beta}{\delta}}{\frac{\alpha}{\delta}} = \frac{ar+\lambda b}{\lambda a - br}$$

Posons $$\frac{\frac{\beta}{\delta}}{\frac{\alpha}{\delta}} = m, \quad \frac{b}{a} = m' ;$$

il vient $$m = \frac{r+\lambda m'}{\lambda - rm'} \qquad \text{ou} \quad (6)\ \frac{m-m'}{1+mm'} = \frac{r}{\lambda}.$$

On passe donc, sur le plan xOy, du point (a, b) au point $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right)$, par une

Digitized by Google

inversion suivie d'une rotation. Comme on a de plus, $c\frac{\gamma}{\delta}=\frac{r^2+\lambda^2}{r^2}$; on voit aisément comment on peut passer géométriquement d'un point à l'autre. Il devient ainsi évident que nous avons là une transformation involutive, qui peut se présenter sous une forme plus condensée.

Posons, en effet :

$$(7)\begin{cases}\frac{\alpha}{\delta}=\frac{X+Y}{2},\ \frac{\beta}{\delta}=\frac{X-Y}{2i},\ \frac{\gamma}{\delta}=Z\ ;\\ br-\lambda a=\frac{X'+Y'}{2},\ ar+\lambda b=,\ \frac{X'-Y'}{2i},\ c=\frac{Z}{\lambda}.\end{cases}$$

Les relations (4) deviennent

$$\begin{cases}\frac{X+Y}{2}=\frac{\lambda(\lambda^2+r^2)}{2r^2}\frac{X'+Y'}{X'Y'}\\ \frac{X-Y}{2i}=\frac{-\lambda(\lambda^2+r^2)}{2ir^2}\frac{X'-Y'}{X'Y'}\\ \frac{Z}{\lambda}=\frac{(\lambda^2+r^2)}{r^2Z'}\end{cases}$$

ou encore $XX'=YY'=ZZ'=\frac{\lambda(\lambda^2+r^2)}{r^2}$

Les relations (7) rapportent les points $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta},\frac{\gamma}{\delta}\right)$, (a, b, c) à deux nouveaux tétraèdres de référence. Remarquons que le plan xOy n'est pas changé, ni l'axe Oz. Pour trouver, dans le plan xOy les nouveaux axes auxquels est rapporté le point $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta},\frac{\gamma}{\delta}\right)$, remarquons que l'on a

$$\frac{\alpha}{\delta}+i\frac{\beta}{\delta}=X\ ;\ \frac{\alpha}{\delta}-i\frac{\beta}{\delta}=Y\ ;$$

les deux nouveaux axes sont donc

$$y-ix=o \text{ pour } X=o,\ et\ y+ix=o \text{ pour } Y=o.$$

De même on a

$$X'=br-\lambda a+i(ar+\lambda b)=\left(r-\frac{\lambda}{i}\right)(b+ai)$$

$$Y'=br-\lambda a-i(ar+\lambda b)=\left(r+\frac{\lambda}{i}\right)(b-ai)$$

ce qui donne $y+ix=o$ pour $X'=o$, et $y-ix=o$ pour $Y'=o$.

La transformation qui fait correspondre le point (a, b, c) au point $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta},\frac{\gamma}{\delta}\right)$, change en général une droite en une cubique circonscrite au tétraèdre de référence, et une surface d'ordre n en une surface d'ordre $3n$, admettant les sommets de ce tétraèdre pour points multiples d'ordre $2n$, et ses arêtes pour génératrices d'ordre n.

Digitized by Google

En particulier, si le point $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ décrit un plan, ce qui revient à dire que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$ passe par un point fixe, le point (a, b, c) décrit une surface du 3me ordre à 4 points doubles, ayant 9 génératrices rectilignes : soit, les 6 arêtes du tétraèdre de référence, et 3 droites s'appuyant respectivement sur 2 arêtes opposées du tétraèdre, et contenues dans le même plan. Nous allons développer son équation.

Soit (x_0, y_0, z_0) le point fixe par lequel passe le plan ; on a $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - \delta = o$; ou, en vertu des relations (4)

$$-\frac{\lambda x_0 (\lambda x - ry)}{r^2 (x^2 + y^2)} - \frac{y_0 \lambda (rx + \lambda y)}{r^2 (x^2 + y^2)} + \frac{z_0 (r^2 + \lambda^2)}{r^2 z} - 1 = 0$$

ou $$r^2 z (x^2 + y^2) - (r^2 + \lambda^2) z_0 (x^2 + y^2) + \lambda z \left[(\lambda x_0 + r y_0) x - (r x_0 - \lambda y_0) y\right] = o$$

On vérifie aisément sur cette équation que l'axe Oz, la droite de l'infini du plan xOy, et les droites $y = \pm ix$ de ce plan, appartiennent à la surface, enfin que le plan de l'infini la coupe suivant 3 droites : $(x^2 + y^2) z = o$. Restent 3 droites, dont une seule est réelle, c'est celle qui s'appuie sur Oz et sur la droite à l'infini du plan xOy ; elle a pour équations

$$z = \frac{r^2 + \lambda^2}{r^2} z_0 ; \quad (\lambda x_0 + r y_0) x + (\lambda y_0 - r x_0) y = o$$

Les sections de la surface par des plans passant par cette droite se composent de cette droite et d'une conique ; ces coniques se projettent sur le plan xOy suivant des cercles concentriques, ayant pour équation

$$r^2 (x^2 + y^2) + \lambda (\lambda x_0 + r y_0) x - \lambda (r x_0 - \lambda y_0) y = K,$$

K étant un paramètre variable avec le plan de section.

Nous avons vu que si le point $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ décrit une droite, le point (a, b, c) décrit une cubique gauche circonscrite au triangle de référence ; ce qui revient à dire que, si on considère tous les plans passant par une même droite, les points dont les vitesses sont les caractéristiques de ces plans sont sur une cubique gauche passant par l'origine O, par le point à l'infini sur Oz, et par les points cycliques du plan xOy. Nous avons rencontré cette propriété dans l'étude synthétique.

Digitized by Google

Complexe des vitesses.

Pour que la droite dont les équations sont

$$x = mz + \mu$$
$$y = nz + \nu$$

soit tangente à la trajectoire d'un point (a, b, c) du système, il faut que l'on ait les relations

$$a = mc + \mu \qquad \frac{-br + \lambda a}{m} = \frac{ar + \lambda b}{n} = \frac{\lambda c}{1}$$
$$b = nc + \nu$$

En éliminant a, b, c entre ces quatre équations, on a la relation (1) $\lambda(m\mu + n\nu) = r(m\nu - n\mu)$ qui est l'équation d'un complexe du second ordre.

Nous allons exprimer l'équation de ce complexe au moyen des coordonnées pluckériennes.

Soient α, β, γ, L, M, N les coordonnées d'une droite du système ; elle appartient au complexe si elle rencontre sa position infiniment voisine dont les coordonnées sont α_1, β_1, γ_1, L_1, M_1, N_1.

Or on a obtenu les développements de ces coordonnées suivant les puissances croissantes de t. Substituons-les dans l'expression

$$\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 + \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N ;$$

on trouve

$$\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 = +(L\beta - M\alpha)rt - \left[(L\beta - M\alpha)(r' + 4\lambda r) + p'(M\gamma - N\beta) + N\gamma r^2\right]\frac{t^2}{1.2} + ..$$

$$\alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N = (-L\beta + M\alpha)rt + \left[(-L\beta + M\alpha)r' + p'(N\beta - M\gamma) + N\gamma r^2 + 2\lambda r(M\alpha - L\beta)\right]\frac{t^2}{1.2} + .$$

D'où $\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 + \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N = \left[2\lambda r(L\beta - M\alpha) + 2N\gamma r^2\right]\frac{t^2}{1.2} + ...$

La droite engendrera un élément de surface développable si le premier membre est un infiniment petit du 3e ordre, c'est-à-dire si l'on a

$$\lambda(L\beta - M\alpha) + N\gamma r = o \quad (2)$$

Il est facile de vérifier que les équations (1) et (2) sont identiques.

L'équation du cône du complexe, dont le sommet est le point $(x_0\, y_0\, z_0)$, s'obtient par les substitutions :

$$\alpha = x - x_0,\ \beta = y - y_0,\ \gamma = z - z_0,\ L = yz, - zy_0,\ M = zx_0 - xz_0.$$

Digitized by Google

On obtient ainsi

$$(3)\quad (yz_0 - zy_0)(y - y_0) - (zx_0 - xz_0)(x - x_0) + \frac{r}{\lambda}(xy_0 - yx_0)(z - z_0) = 0.$$

Ce cône passe par l'origine ; si on transporte son sommet en ce point, son équation devient

$$\lambda z_0 (x^2 + y^2) - yz(\lambda y_0 + rx_0) - xz(\lambda x_0 - ry_0) = 0$$

Il contient l'axe Oz, et passe par les points cycliques du plan $x\,Oy$. Le cône (3) contient donc les 4 sommets du tétraèdre double, comme il a été démontré dans l'étude géométrique du complexe.

Pour trouver sur ce cône les points qui ont pour vitesses les génératrices, il suffit d'écrire

$$\frac{x_0 - x}{\lambda x - ry} = \frac{y_0 - y}{rx + \lambda y},$$

d'où :

$$(4)\quad r(x^2 + y^2) - x(rx_0 - \lambda y_0) - y(\lambda x_0 + ry_0) = 0$$

Le cône (3) et le cylindre (4) ayant une génératrice commune, $x = x_0$, $y = y_0$, leur intersection est une cubique gauche ; on voit aisément qu'elle passe par les sommets du tétraèdre double.

Pour avoir l'équation tangentielle de la conique du complexe située dans le plan

$$u_0 x + v_0 y + w_0 y - 1 = 0,$$

nous ferons dans l'équation (2) les substitutions

$$\alpha = vw_0 - wv_0,\ \beta = wu_0 - uw_0,\ \gamma = uv_0 - vu_0,\ L = u - u_0,\ M = v - v_0,\ N = w - w_0.$$

Il vient alors

$$(5)\ (u - u_0)(wu_0 - uw_0) - (v - v_0)(vw_0 - wv_0) + \frac{r}{\lambda}(w - w_0)(uv_0 - vu_0) = 0.$$

C'est une parabole, puisqu'elle est satisfaite pour $u = v = w = 0$. Si l'on y remplace w_0 par $\frac{w_0}{t}$, on a :

$$(u - u_0)(wu_0 t - uw_0) - (v - v_0)(vw_0 - wv_0 t) + \frac{r}{\lambda}(wt - w_0)(uv_0 - vu_0) = 0;$$

et cette équation étant satisfaite pour $u = v = t = 0$, la conique est tangente au plan $x\,Oy$.

Pour avoir la projection de la parabole sur ce plan, il suffit d'annuler w dans l'équation (5).

On obtient alors, $u^2 + v^2 - u\left(u_0 - \frac{r}{\lambda} v_0\right) - v\left(v_0 + \frac{r}{\lambda} u_0\right) = 0.$

Digitized by Google

C'est l'équation tangentielle d'une parabole qui a son foyer à l'origine. Comme cette équation est indépendante de w_0, on voit que le lieu des paraboles du complexe, dont le plan passe par une même droite du plan xOy, est un cylindre. Cette droite est d'ailleurs tangente à la parabole, car l'équation de celle-ci est satisfaite pour $u = u_0$ et $v = v_0$.

De même que nous avons trouvé dans le cône du complexe le lieu des points dont les génératrices représentaient les vitesses, nous allons chercher la développable formée par les plans dont les caractéristiques sont les tangentes de la conique du complexe.

La caractéristique du plan $ux + vy + wz - t = o$, s'obtient en adjoignant à cette équation l'équation suivante : $(\lambda u - rv)\,x + (ru + \lambda v)\,y + \lambda wz - 2\lambda t = o$ ou encore $r\,(vx - uy) + \lambda t = o$.

La caractéristique sera dans le plan $u_0x + v_0y + w_0z - t_0 = o$, si l'on peut avec cette équation identifier celle-ci : $x\,(u + \rho rv) + y\,(v - \rho ru) + wz - t\,(1 - \lambda\rho) = o$.

On a alors les relations

$$\frac{u + \rho rv}{u_0} = \frac{v - \rho ru}{v_0} = \frac{w}{w_0} = \frac{(1 - \lambda\rho)\,t}{t_0};$$

ou, en faisant $t = t_0 = 1$

$$\frac{u + \rho rv}{u_0} = \frac{v - \rho ru}{v_0} = \frac{w}{w_0} = \frac{1 - \lambda\rho}{1}.$$

on en déduit :

$$v = \frac{1 - \lambda\rho}{1 + \rho^2 r^2}\,(v_0 + \rho ru_0), \quad u = \frac{1 - \lambda\rho}{1 + \rho^2 r^2}\,(u_0 - \rho rv_0); \quad w = w_0\,(1 - \lambda\rho).$$

Ce sont les équations d'une développable de la 3e classe et du 4e ordre. On vérifie qu'elle est de la 3e classe en substituant les expressions de u, v, w, dans l'équation $ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = o$; on obtient une équation du 3e degré en ρ, qui donne 3 plans tangents passant par le point (x_0, y_0, z_0).

2. — Nous avons vu que le lieu des points dont les vitesses sont concourantes est une cubique gauche ; à cette question se rattache celle de savoir quelles sont les courbes telles que les vitesses de leurs points forment une surface développable.

Soient M, M′ deux points infiniment voisins de la courbe; il suffira d'écrire que les vitesses v, v' de ces points, et la droite MM′ sont parallèles à un même plan ; on a ainsi

$$A\,(-br + \lambda a) + B\,(ar + \lambda b) + C\lambda c = o.$$

$$A\,[-(b + db)\,r + \lambda(a + da)] + B\,[(a + da)\,r + \lambda\,(b + db)] + C\lambda\,(c + dc) = o.$$

$$A\,da + B\,db + C\,dc = o.$$

Digitized by Google

éliminant A, B, C, on trouve la relation

$$(6) \qquad \lambda c(da^2 + db^2) + dc[r(b\,da - a\,db) - \lambda(a\,da + b\,db)] = o.$$

On voit ainsi que sur toute surface $c = \varphi(a, b)$, il y a deux familles de ces courbes.

Remarquons que les vitesses des points M et M′ étant dans un même plan, la droite MM′ est la caractéristique de ce plan, et, par conséquent, elle est une droite du complexe. Ainsi, les courbes satisfaisant à l'équation différentielle (6) sont telles que toutes leurs tangentes appartiennent au complexe des vitesses.

On peut arriver à l'équation différentielle en partant de cette propriété.

La tangente à la courbe ayant pour équations

$$\frac{x-a}{da} = \frac{y-b}{db} = \frac{z-c}{dc},$$

les coordonnées de cette droite sont :

$$\alpha = da,\ \beta = db,\ \gamma = dc;$$
$$L = c\,db - b\,dc,\ M = a\,dc - c\,da,\ N = b\,da - a\,db.$$

substituons dans l'équation du complexe des vitesses

$$\lambda(L\beta - M\alpha) + rN\gamma = o,$$

et nous obtenons l'équation différentielle (6).

Passons des coordonnées (a, b, c), aux coordonnées demi-polaires ρ, ω, c, définies par les relations

$$a = \rho\cos\omega,\ b = \rho\sin\omega.$$

On a : $da^2 + db^2 = \rho^2 d\omega^2 + d\rho^2$; $a\,da + b\,db = \rho\,d\rho$,
$b\,da - a\,db = -\rho^2 d\omega$.

l'équation (6) devient

$$(7) \quad \lambda c(\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2) - dc[r\rho^2 d\omega + \lambda\rho\,d\rho] = o.$$

3. — Si la surface sur laquelle est tracée la courbe est de révolution, on a $c = \varphi(\rho)$; $dc = \varphi'(\rho)\,d\rho$, et l'équation devient

$$(8) \quad \lambda\varphi(\rho)(\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2) - \varphi'(\rho)[r\rho^2 d\omega\,d\rho + \lambda\rho\,d\rho^2] = o.$$

On tire de cette équation $d\omega$ en fonction de ρ et de $d\rho$, et on est ainsi ramené aux quadratures.

L'équation étant du 2e degré relativement à $\frac{d\omega}{d\rho}$, il y a, comme nous l'avons dit, deux familles de courbes. Ces deux familles se confondent si le discriminant de l'équation est nul, c'est-à-dire si l'on a :

Digitized by Google

$$r^2\rho^2\varphi'^2(\rho) - 4\lambda^2\rho^2\varphi(\rho)\left[\varphi(\rho) - \rho\varphi'(\rho)\right] = o$$

ou $$r^2\left[\frac{\rho\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}\right]^2 + 4\lambda^2\frac{\rho\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} - 4\lambda^2 = o$$

d'où $$\frac{\rho\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{-2\lambda^2 \pm \sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2 r^2}}{r^2} = -\frac{2\lambda^2}{r^2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{r^2}{\lambda^2}}\right)$$

Mais, on a $\frac{r}{\lambda} = \operatorname{tg} V$; donc $\frac{\rho\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = -2\operatorname{cotg}^2 V\left(1 \mp \frac{1}{\cos V}\right)$

En séparant les deux racines, on a :

1° $$-2\operatorname{cotg}^2 V\left(1 - \frac{1}{\cos V}\right) = \frac{4\operatorname{cotg}^2 V \sin^2\frac{V}{2}}{\cos V} = \frac{\cos V}{\cos^2\frac{V}{2}};$$

donc : $\frac{\rho\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{V}{2}$.

2° $$-2\operatorname{cotg}^2 V\left(1 + \frac{1}{\cos V}\right) = \frac{-4\operatorname{cotg}^2 V\cos^2\frac{V}{2}}{\cos V} = -\frac{\cos V}{\sin^2\frac{V}{2}} = 1 - \operatorname{cotg}^2\frac{V}{2}$$

d'où $\frac{\rho\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = 1 - \operatorname{cotg}^2\frac{V}{2}$.

De la 1re racine on tire $log\ \varphi(\rho) = \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{V}{2}\right) log\,\rho + log\,A$, A étant une constante ; d'où : $\varphi(\rho) = A\rho^{1 - \operatorname{tg}^2\frac{V}{2}}$.

De la 2e racine on tire de même : $\varphi(\rho) = A\rho^{1 - \operatorname{cotg}^2\frac{V}{2}}$; ce qui donne deux familles de surface.

L'équation de la courbe méridienne dans le plan zOx est $z = Ax^k$, K désignant $1 - \operatorname{tg}^2\frac{V}{2}$ ou $1 - \operatorname{cotg}^2\frac{V}{2}$. En particulier pour la valeur simple $V = 60°$, on a $1 - \operatorname{tg}^2\frac{V}{2} = \frac{2}{3}$; $1 - \operatorname{cotg}^2\frac{V}{2} = -2$, et les courbes méridiennes deviennent $z^3 = A^3x^2$, et $zx^2 = A$. La première de ces courbes est la parabole semi-cubique.

Le discriminant de l'équation (8) étant nul, les deux racines de cette équation sont égales, et l'on a $\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{r\rho^2\varphi'(\rho)}{2\lambda\rho^2\varphi(\rho)}$; comme l'on a d'ailleurs $\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{K}{\rho}$, il vient $\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{Kr}{2\lambda}\frac{1}{\rho}$.

Or $$\frac{Kr}{2\lambda} = \frac{\cos V}{\cos^2\frac{V}{2}} \cdot \frac{\sin V}{2\cos V} = \operatorname{tg}\frac{V}{2};$$

ou pour la 2e valeur de K,

$$\frac{Kr}{2\lambda} = -\frac{\cos V}{\sin^2\frac{V}{2}} \cdot \frac{\sin V}{2\cos V} = -\operatorname{cotg}\frac{V}{2}.$$

Digitized by Google

On a donc $\quad d\omega = \operatorname{tg}\frac{V}{2}\cdot\frac{d\rho}{\rho}$, d'où $\rho = Ce^{\omega.\operatorname{cotg}\frac{V}{2}}$

et $\quad d\omega = -\operatorname{cotg}\frac{V}{2}\frac{d\rho}{\rho}$, d'où $\rho = Ce^{-\omega\operatorname{tg}\frac{V}{2}}$

On obtient ainsi, en projection sur le plan xOy, deux familles de spirales logarithmiques orthogonales entre elles.

4. — Il est un autre cas où l'intégration se ramène aisément aux quadratures ; c'est celui où la surface $c = \varphi(a, b)$ est un conoïde. On a alors $c = \varphi(\omega)$, et l'équation différentielle (7) devient

$$\lambda\varphi(\omega)(\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2) - \varphi'(\omega)(r\rho^2 d\omega + \lambda\rho\, d\rho)\, d\omega = o.$$

ou (9) $$\rho^2\left[\lambda\varphi(\omega) - r\varphi'(\omega)\right] d\omega^2 - \lambda\rho\varphi'(\omega)\, d\omega\, d\rho + \lambda\varphi(\omega)\, d\rho^2 = o.$$

On en tire aisément $\frac{d\rho}{\rho}$ en fonction de ω et de $d\omega$, et on est ainsi ramené à une quadrature.

L'équation étant du second degré relativement à $\frac{d\rho}{\rho}$, il y a deux familles de courbes, qui se confondent, si le discriminant est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\lambda\varphi'^2(\omega) - 4\varphi(\omega)\left[\lambda\varphi(\omega) - r\varphi'(\omega)\right] = o\,;$$

d'où $$\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)} = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4\lambda^2}}{\lambda}$$

Or,

$$\frac{-2r + \sqrt{4r^2 + 4\lambda^2}}{\lambda} = -\frac{2r}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{r^2}}\right) = -\frac{2r}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\sin V}\right) = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{V}{2}\right)$$

de même $\frac{-2r - \sqrt{4r^2 + 4\lambda^2}}{\lambda} = -2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{V}{2}\right)$.

Désignons par K l'une quelconque des constantes $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{V}{2}\right)$ et $-2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{V}{2}\right)$, on a $\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)} = K$, d'où $\varphi(\omega) = Ce^{K\omega}$.

L'équation du conoïde est donc $z = Ce^{K\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

Le discriminant de l'équation (9) étant nul, les racines de cette équation sont égales, et on a $\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{\varphi'(\omega)}{2\varphi(\omega)}$; et, comme l'on a $\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)} = K$, il vient $\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{K}{2}$, d'où $\rho = Ce^{\frac{K}{2}\omega}$. On voit que dans ce cas on obtient encore, en projection sur le plan xOy, des spirales logarithmiques.

5. — Envisageons enfin le cas où la surface a une équation de la forme générale $c = \varphi(\rho, \omega)$; l'équation différentielle de la courbe devient

Digitized by Google

$$\lambda\varphi(\rho,\omega)(\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}d\omega\right)(r\rho^2 d\omega + \lambda\rho\, d\rho) = o$$

ou, (10) $\rho^2 d\omega^2\left[\lambda\varphi(\rho'\omega) - r\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right] - \rho\left(r\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)d\omega.\, d\rho + \lambda\left[\varphi(\rho'\omega) - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right]d\rho^2 = o.$

Déterminons la fonction φ par la condition $\lambda\varphi(\rho,\omega) = r\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$; on y satisfait en posant $\varphi(\rho,\omega) = \psi(\rho)\, e^{\frac{\lambda}{r}\omega}$, $\psi(\rho)$ étant une fonction arbitraire de ρ.

L'équation (10) devient alors

$$\rho\left(r\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)d\omega\, d\rho - \lambda\left[\varphi(\rho'\omega) - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right]d\rho^2 = o.$$

Elle est satisfaite par $d\rho = o$, ou $\rho = \text{const}$.

Donc, sur la surface $z = \psi(\rho)\, e^{\frac{\lambda}{r}\omega}$, la première famille de courbes est donnée par l'intersection de la surface avec un cylindre ayant Oz pour axe. L'autre famille de courbes répond à l'équation différentielle

$$\rho\left[r\rho\psi'(\rho)e^{\frac{\lambda}{r}\omega} + \frac{\lambda^2}{r}\psi(\rho)e^{\frac{\lambda}{r}\omega}\right]d\omega - \lambda\left[\psi(\rho)e^{\frac{\lambda}{r}\omega} - \rho\psi'(\rho)e^{\frac{\lambda}{r}\omega}\right]d\rho = o$$

$$d\omega = \frac{r\lambda[\psi(\rho) - \rho\psi'(\rho)]}{\rho[r^2\rho\psi'(\rho) + \lambda^2\psi(\rho)]}d\rho$$

On est ainsi ramené à une quadrature. Dans le cas particulier où $\psi(\rho) - \rho\psi'(\rho) = o$, c'est-à-dire $\psi(\rho) = C\rho$, l'équation de la surface est $z = C\rho e^{\frac{\lambda}{r}\omega}$, et l'équation différentielle donne $d\omega = o$, ou $\omega = \text{const}$. La seconde famille de courbes se compose alors des intersections de la surface par les plans passant par l'axe Oz.

Complexe des droites qui engendrent des surfaces réglées de même paramètre.

1. — Soient $\alpha, \beta, \gamma, L, M, N$ les coordonnées d'une droite, et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, L_1, M_1, N_1$ les coordonnées de cette même droite au moment infiniment voisin t. La distance d de ces deux droites a pour expression

$$d = \frac{\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 + \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N}{\sqrt{\Sigma(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)^2}}$$

L'angle φ de ces droites a pour sinus

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{\Sigma(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}\,;$$

On a donc

$$\frac{d}{\sin\varphi}=\frac{(\alpha L_1+\beta M_1+\gamma N_1+\alpha_1 L+\beta_1 M+\gamma_1 N)\,\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}{\Sigma(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2}$$

Or, en remplaçant α_1, β_1, γ_1, L_1, M_1, N_1 par leurs développements, on a trouvé :

$$\alpha L_1+\beta M_1+\gamma N_1+\alpha_1 L+\beta_1 M+\gamma_1 N=\left[\lambda r(L\beta-M\alpha)+N\gamma r^2\right]t^2+\ldots$$

On a d'ailleurs :

$$\beta\gamma_1-\gamma\beta_1=r\alpha\gamma t+\ldots,\ \gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1=-r\beta\gamma t+\ldots,\ \alpha\beta_1-\beta\alpha_1=r(\alpha^2+\beta^2)\,t+\ldots,$$

d'où $\Sigma(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2=r^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,t^2+\ldots$

Donc $$\frac{d}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\,\left\{[\lambda r(L\beta-M\alpha)+N\gamma r^2]\,t^2+\ldots\right\}}{r^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,t^2+\ldots}$$

Passant à la limite pour $t=o$, le premier membre devient le paramètre de distribution π de la surface réglée engendrée par la droite, et la relation précédente devient

$$(1)\quad \pi=\frac{\lambda r(L\beta-M\alpha)+N\gamma r^2}{r^2(\alpha^2+\beta^2)},\ \text{ou}\ \lambda(L\beta-M\alpha)+N\gamma r=\pi r(\alpha^2+\beta^2)$$

C'est l'équation d'un complexe du second ordre, celui des droites du système qui engendrent des surfaces réglées de paramètre π.

Si nous transportons l'origine des coordonnées en un point O′ de l'axe oz, tel que $OO'=h$, les nouvelles coordonnées du point (a, b, c) sont a, b, c-h. Quant aux coordonnées de droite, α, β, γ, N ne changent pas, mais les deux autres coordonnées deviennent :

$$L'=(c-h)\beta-b\gamma=L-h\beta\,;\ M'=a\gamma-(c-h)\alpha=M+h\alpha.$$

Substituons, dans l'équation du complexe, à L et M leurs valeurs $L'+h\beta$ et $M'-h\alpha$; il vient

$$\pi r(\alpha^2+\beta^2)=\lambda(L'\beta+h\beta^2-M'\alpha+h\alpha^2)+N\gamma r$$

ou $$(\alpha^2+\beta^2)(\pi r-\lambda h)=\lambda(L'\beta-M'\alpha)+N\gamma r$$

Si l'on a $h=\pi.\frac{r}{\lambda}$, l'équation devient

$$\lambda(L'\beta-M'\alpha)+N\gamma r=o.$$

Elle est identique à celle du complexe des vitesses, et nous retrouvons ainsi le résultat indiqué précédemment par la géométrie.

Digitized by Google

Point central.

2. — Les équations de la droite étant mises sous la forme

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=\rho,$$

la valeur de ρ qui répond à la position du point central est donnée par la relation

$$\rho(A^2+B^2+C^2)=\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix};$$

dans laquelle on a

$$A=\beta\gamma'-\gamma\beta',\ B=\gamma\alpha'-\alpha\gamma',\ C=\alpha\beta'-\beta\alpha',$$

et, suivant les développements,

$$\alpha'=-\beta r+\lambda\alpha,\ \beta'=\alpha r+\lambda\beta,\ \gamma'=\lambda\gamma,$$

ainsi que

$$a'=-br+\lambda a,\ b'=ar+\lambda b,\ c'=\lambda c.$$

Il en résulte $A=-r\alpha\gamma,\ B=-r\beta\gamma,\ C=r(\alpha^2+\beta^2)$

et $A^2+B^2+C^2=r^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$;

et aussi $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix}=r\begin{vmatrix} -br+\lambda a & ar+\lambda b & \lambda c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix}$

$$=r\begin{vmatrix} -br+\lambda a & ar+\lambda b & \lambda c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ o & o & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{vmatrix}=r(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[\lambda(a\beta-b\alpha)-r(a\alpha+b\beta)\right]$$

La relation qui donne ρ devient donc

$$\rho r^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=r(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[\lambda(a\beta-b\alpha)-r(a\alpha+b\beta)\right],$$

Les coordonnées du point central sont donc

$$\begin{cases} x=a+\dfrac{\alpha}{r(\alpha^2+\beta^2)}\left[\lambda(a\beta-b\alpha)-r(a\alpha+b\beta)\right]=\dfrac{(\lambda\alpha+r\beta)(a\beta-b\alpha)}{r(\alpha^2+\beta^2)} \\ y=b+\dfrac{\beta}{r(\alpha^2+\beta^2)}\left[\lambda(a\beta-b\alpha)-r(a\alpha+b\beta)\right]=\dfrac{(\lambda\beta-r\alpha)(a\beta-b\alpha)}{r(\alpha^2+\beta^2)} \\ z=c+\dfrac{\gamma}{r(\alpha^2+\beta^2)}\left[\lambda(a\beta-b\alpha)-r(a\alpha+b\beta)\right]=\dfrac{\lambda\gamma(a\beta-b\alpha)-r\beta(b\gamma-c\beta)+r\alpha(c\alpha-a\gamma)}{r(\alpha^2+\beta^2)}, \end{cases}$$

Digitized by Google

ou encore,

$$(2) \qquad x = -\frac{(\lambda\alpha + r\beta)\,N}{r(\alpha^2+\beta^2)}, \quad y = -\frac{(\lambda\beta - r\alpha)\,N}{r(\alpha^2+\beta^2)}, \quad z = \frac{rL\beta - rM\alpha - \lambda N\gamma}{r(\alpha^2+\beta^2)}$$

Remarquons que x et y ne dépendent que de α, β, et N, c'est-à-dire de la projection de la droite sur le plan xOy. On voit par là que les points centraux des surfaces réglées, engendrées par toutes les droites situées dans un même plan parallèle à Oz sont situés sur une même droite parallèle à OZ. Cette droite perce le plan xOy en un point m déterminé par la propriété suivante.

Des deux premières équations (2) on tire

$$y(\lambda\alpha + r\beta) = x(\lambda\beta - r\alpha), \quad \text{d'où} \quad \frac{r}{\lambda} = \frac{\beta x - \alpha y}{\alpha x + \beta y}$$

$$\text{ou} \quad \frac{r}{\lambda} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{y}{x}}$$

Ainsi Om fait avec la projection de la droite un angle dont la tangente est $\frac{r}{\lambda}$.

Cette propriété montre bien que le point central est le point de la droite qui, dans le déplacement pour lequel elle fait partie du complexe des vitesses, décrit une trajectoire tangente à cette droite.

Si nous considérons de nouveau les droites contenues dans un même plan parallèle à Oz, celles qui engendrent des surfaces réglées de même paramètre passent par un même point, dont la distance au plan xOy est $\pi\frac{r}{\lambda}$, et dont la projection t sur ce plan est telle que Ot est perpendiculaire à la droite Om dont nous avons parlé plus haut.

On peut voir enfin que toutes les droites situées dans un plan parallèle à xOy, et à une distance de xOy égale à $\pi\frac{r}{\lambda}$, engendrent des surfaces réglées de paramètre π. Si, en effet, dans l'équation du complexe

$$\pi r(\alpha^2+\beta^2) = \lambda(L\beta - M\alpha) + Nr\gamma,$$

nous posons $\gamma = o$, $c = \frac{\pi r}{\lambda}$, il vient : $L = \frac{\pi r}{\lambda}\beta$, $M = -\frac{\pi r}{\lambda}\alpha$,

et $\pi r(\alpha^2+\beta^2) = \lambda\left(\frac{\pi r}{\lambda}\beta^2 + \frac{\pi r}{\lambda}\alpha^2\right)$,

équation identiquement vérifiée.

Digitized by Google

Eléments du second ordre. — Centre et Ellipsoïde des Accélérations. Cubique des inflexions.

1. — En égalant à zéro les coefficients de t^2 dans les développements des coordonnées d'un point, on a 3 équations du 1er degré qui déterminent le point du système dont l'accélération est nulle :

$$\begin{cases} u'' - br' + a\lambda' - a(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda br = o \\ v'' + ar' - cp' + b\lambda' - (r^2 - \lambda^2)\, b + 2\lambda ar = o \\ w'' + bp' + c\lambda' + c\lambda^2 = o \end{cases}$$

Le déterminant des inconnues est

$$\begin{vmatrix} \lambda' + \lambda^2 - r^2 & -(r' + 2\lambda r) & o \\ r' + 2\lambda r & \lambda' + \lambda^2 - r^2 & -p' \\ o & p' & \lambda' + \lambda^2 \end{vmatrix}$$

ou $(\lambda' + \lambda^2)\left\{(\lambda' + \lambda^2 - r^2)^2 + (r' + 2\lambda r)^2 + p'^2\right\} - p'^2 r^2.$

Ce déterminant n'est pas nul en général, et il y a, à distance finie, un point unique dont l'accélération est nulle ; c'est le centre des accélérations.

Le lieu des points dont l'accélération a une valeur donnée A est l'ellipsoïde

$$[u'' - br' + a\lambda' - a(r^2 - \lambda^2) - 2\lambda br]^2 + [v'' + ar' - cp' + b\lambda' - b(r^2 - \lambda^2) + 2\lambda ar]^2 + (w'' + bp' + c\lambda' + c\lambda^2)^2 = A^2$$

Cet ellipsoïde reste homothétique et concentrique à lui-même quand on fait varier la valeur A de l'accélération.

De l'homographie qui lie les coordonnées d'un point aux composantes du vecteur qui représente son accélération, on déduit un certain nombre de propriétés, parmi lesquelles nous énoncerons les suivantes.

Le lieu des points dont les accélérations font un angle constant avec une direction fixe est un cône du second ordre qui a son sommet au centre des accélérations ; par suite, le lieu des points d'un plan dont les accélérations font un angle donné avec une droite donnée, est une conique.

Les accélérations des différents points d'une section plane d'un ellipsoïde des accélérations, sont égales et font des angles égaux avec une droite fixe. Les accélérations, des extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde des accélérations sont perpendiculaires deux à deux.

2. — Si en un point (a, b, c) la vitesse et l'accélération ont même direction, la trajectoire présente une inflexion en ce point.

Digitized by Google

On a dans ce cas :

$$\frac{u''-br'+a\lambda'-a(r^2-\lambda^2)-2\lambda br}{-br+\lambda a}=\frac{v''+ar'-cp'+b\lambda'-b(r^2-\lambda^2)+2\lambda ar}{ar+\lambda b}=\frac{w''+bp'+c\lambda'+c\lambda^2}{\lambda c}$$

Ce sont les équations de la cubique d'inflexion ; cette cubique passe par l'origine, et par le centre des accélérations.

En groupant avec le 3me rapport, le premier, puis le second, on obtient les deux quadriques réglées

$$(1)\quad p'rb^2+bc(\lambda'r-r'\lambda-\lambda^2 r)-r^2\lambda ac-\lambda p'ab-\lambda w''a+rw''b+\lambda u''c=o$$

$$(2)\quad p'\lambda(b^2+c^2)+\lambda r^2 bc+ac(\lambda'r-r'\lambda-\lambda^2 r)+rp'ab+rw''a+\lambda w''b-\lambda v''c=o.$$

Ces deux quadriques ont en commun la génératrice $\begin{cases} c=o \\ w''+bp'=o \end{cases}$; le reste de l'intersection est la cubique des inflexions.

On peut se rendre compte que cette cubique est tangente à l'origine aux courbes lieux des centres instantanés dans le système et dans l'espace.

En effet, la tangente à ces dernières courbes a pour équations

$$(3)\quad a=-\frac{\lambda u''+rv''}{\lambda^2+r^2}t,\quad b=-\frac{\lambda v''-ru''}{\lambda^2+r^2}t,\quad c=-\frac{w''}{\lambda}t.$$

Les plans tangents à l'origine aux surfaces (1) et (2) ont pour équations

$$w''(-\lambda a+rb)+\lambda u''c=o,\quad \text{et}\quad w''(ar+\lambda b)-\lambda v''c=o.$$

Elles sont satisfaites si on y substitue à a, b et c, leurs valeurs tirées des équations (3).

Plans osculateurs. — Plans surosculateurs

1. — Si nous désignons par a', a''.... ; b', b''.... ; c', c''.... ; les coefficients de t, t^2,... dans les développements des coordonnées d'un point qui, à l'époque $t=o$, a pour coordonnées a, b, c, pour que le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=o$ ait un contact du second ordre avec la trajectoire du point (a, b, c), on doit avoir les relations

$$\alpha a+\beta b+\gamma c-\delta=o$$
$$\alpha a'+\beta b'+\gamma c'=o$$
$$\alpha a''+\beta b''+\gamma c''=o$$

Le plan osculateur aura donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=o$$

Digitized by Google

Cette équation est du 3e degré en a, b et c ; donc *le lieu des points dont les plans osculateurs des trajectoires passent par un point donné est une surface du 3me ordre.*

Nous allons chercher l'enveloppe des plans osculateurs des trajectoires des points d'une droite D.

Soient (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), deux points de cette droite, et ρ un paramètre variable ; un point quelconque de D a pour coordonnées

$$\frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda}, \quad \frac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda}, \quad \frac{c_1 + \lambda c_2}{1+\lambda},$$

$$\text{ou} \quad ma_1 + na_2, \; mb_1 + nb_2, \; mc_1 + nc^2,$$

avec la relation $m + n = 1$.

L'équation du plan osculateur s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ ma'_1 + na'_2 & mb'_1 + nb'_2 & mc''_1 + nc'_2 \\ ma''_1 + na''_2 & mb''_1 + nb''_2 & mc''_1 + nc''_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ma_1 + na_2 & mb_1 + nb_2 & mc_1 + nc_2 \\ ma'_1 + na'_2 & mb'_1 + nb'_2 & mc'_1 + nc'_2 \\ ma''_1 + na''_2 & mb''_1 + nb''_2 & mc''_1 + nc''_2 \end{vmatrix} = o$$

En la développant on obtient

$$m^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \end{vmatrix} + mn \left\{ \begin{vmatrix} x & y & z \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_2 & b''_2 & c''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \end{vmatrix} \right\} + n^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a''_2 & b''_2 & c''_2 \end{vmatrix} =$$

$$= + m^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \end{vmatrix} + m^2 n \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_2 \\ a''_1 & b''_1 & c''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1 \\ a'_1 & b'_2 & c'_1 \\ a''_1 & b''_2 & c''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_1 & c'_1 \\ a''_2 & b''_1 & c''_1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ mn^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_1 \\ a''_2 & b''_2 & c''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_2 \\ a'_2 & b'_1 & c'_2 \\ a''_2 & b''_1 & c''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_2 & c'_2 \\ a''_1 & b''_2 & c''_2 \end{vmatrix} \right\} + n^3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a''_2 & b''_2 & c''_2 \end{vmatrix}$$

L'enveloppe cherchée est donc, en général, une développable de la 3me classe. Écrivons-la sous la forme abrégée :

$$(1) \quad m^2 \mathrm{P} + mn \mathrm{Q} + n^2 \mathrm{R} + m^3 \mathrm{A} + m^2 n \mathrm{B} + mn^2 \mathrm{C} + n^3 \mathrm{D} = o,$$

où P, Q, R sont des fonctions linéaires de x, y, z, et A, B, C, D sont des constantes.

Si on transporte ce plan à l'origine, on a

$m^2 \mathrm{P} + mn \mathrm{Q} + n^2 \mathrm{R} = o$, (où l'on suppose que les constantes de P, Q, R ont disparu)

et ce plan enveloppe un cône du 2d degré.

Quand l'un des points (a_1, b_1, c_1) de la droite D se trouve sur la cubique des

Digitized by Google

inflexions, on a $\frac{a'_1}{a''_1} = \frac{b'_1}{b''_1} = \frac{c'_1}{c''_1}$; P et A sont alors identiquement nuls, et l'équation du plan devient

$$(2)\ mQ + nR + m^2 B + mn C + n^2 D = o\,;$$

ou encore

$$mQ + (1-m)R + m^2 B + m(1-m)C + (1-m)^2 D = o.$$

Son enveloppe a pour équation

$$(Q - R + C - 2D)^2 - 4(B + D - C)(R + D) = o\,;$$

c'est un cylindre parabolique.

Enfin, si un second point (a_2, b_2, c_2) de la droite D est sur la cubique d'inflexion, R et D sont aussi identiquement nuls, et l'équation (2) devient

$$(3)\ Q + mB + nC = o\,;$$

et les plans osculateurs des trajectoires de tous les points de la droite sont parallèles entre eux.

La géométrie explique aisément ces résultats. Les vitesses des divers points d'une droite forment un paraboloïde ; les accélérations en forment un autre, et les plans osculateurs, se trouvant ainsi tangents à la fois à ces deux paraboloïdes qui ont une génératrice commune D, enveloppent une développable de la 3e classe. Quand la droite D rencontre la cubique des inflexions en un point, les deux paraboloïdes ont une autre génératrice commune, qui est la droite qui porte la vitesse et l'accélération de ce point ; la développable circonscrite est alors un cône du 2e ordre, et, comme le plan de l'infini appartient à la développable, c'est un cylindre parabolique. Enfin, si la droite D rencontre la cubique en deux points, les paraboloïdes ont quatre génératrices communes, dont l'une est située dans le plan de l'infini ; c'est par cette dernière droite que passent les plans osculateurs.

2. — En substituant dans l'équation

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = o,$$

les développements de x, y, z, on voit que ce plan aura un contact du 3e ordre avec la trajectoire du point (a, b, c) si l'on a les relations

$$\alpha a' + \beta b' + \gamma c' = o$$
$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = o$$
$$\alpha a''' + \beta b''' + \gamma c''' = o,$$

ce qui conduit à la relation de condition

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = o$$

On voit ainsi que *le lieu des points dont les trajectoires ont quatre points infiniment voisins dans un même plan, est une surface du 3e ordre, qui contient la cubique des inflexions.*

Le contact sera du 4e ordre si l'on a aussi la relation $\alpha a^{\text{IV}} + \beta b^{\text{IV}} + \gamma c^{\text{IV}} = o$, et le point (a, b, c) sera aussi sur la surface du 3e ordre

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \end{vmatrix} = o$$

Ce point appartient donc à l'intersection des deux surfaces ; mais la réciproque n'est pas exacte, car on voit aisément que les points de la cubique (1, 2) $\frac{a''}{a'''} = \frac{b''}{b'''} = \frac{c''}{c'''}$, qui appartient aux deux surfaces, ne jouissent pas de la propriété en question.

Enfin, le contact sera du cinquième ordre si on a aussi $\alpha a^{\text{V}} + \beta b^{\text{V}} + \gamma c^{\text{V}} = o$, et le point appartient encore à la surface du 3me ordre

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & c^{\text{V}} \end{vmatrix} = o$$

Ainsi, tout point dont le trajectoire a un contact du 5me ordre avec son plan osculateur, appartient aux surfaces (1), (2) et (3). Mais, dans les 27 points communs à ces trois surfaces, il faut en rejeter un certain nombre.

La cubique (1, 2) rencontre, en effet, la surface (3) en 9 points qui ne conviennent pas à la question, comme on l'a vu.

De même, les surfaces (2) et (3) ont en commun la cubique

(2, 3) $\frac{a'''}{a^{\text{IV}}} = \frac{b'''}{b^{\text{IV}}} = \frac{c'''}{c^{\text{IV}}}$; et nous devons rejeter les points d'intersection de cette cubique avec la surface (1). Il semble donc que des 27 points on doive en écarter dix-huit.

Mais remarquons que le point qui satisfait aux équations $a''' = b''' = c''' = o$, et qui est commun aux trois surfaces, a été compté deux fois ; une fois comme intersection de la cubique (1, 2) avec la surface (3), une autre fois, comme intersection de la cubique (2, 3) avec la surface (1).

Il reste donc, en réalité, dix points, comme nous l'avons vu dans l'étude géométrique.

Digitized by Google

3. — Pour obtenir la surface enveloppe des plans surosculateurs des trajectoires des points situés sur la surface (1), remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c - \delta &= o \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' &= o \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' &= o \\ \alpha a''' + \beta b''' + \gamma c''' &= o \end{aligned}$$

En substituant dans les trois dernières équations à a', b', c', a'', b''... leurs expressions en fonction de a, b, c ; et ordonnant par rapport à ces lettres, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c - \delta &= o \\ A'a + B'b + \Gamma'c - \Delta' &= o \\ A''a + B''b + \Gamma''c - \Delta'' &= o \\ A'''a + B'''b + \Gamma'''c - \Delta''' &= o \end{aligned}$$

A, B, Γ, Δ, A', B',.... étant des fonctions linéaires et homogènes de α, β, γ. L'enveloppe des plans a donc pour équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ A' & B' & \Gamma' & \Delta' \\ A'' & B'' & \Gamma'' & \Delta'' \\ A''' & B''' & \Gamma''' & \Delta''' \end{vmatrix} = o$$

C'est une surface de la quatrième classe.

Éléments du second ordre dans le déplacement d'un plan.

1. — Soient α, β, γ, δ les coordonnées d'un plan à l'époque $t = o$, et α', β', γ', δ', α'', β'', γ'' δ'',... les coefficients de t, t^2,... dans les développements des coordonnées suivant les puissances de t. Le point (x, y, z) dont la trajectoire à dans le mouvement inverse le plan $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pour plan osculateur satisfait aux relations.

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta &= o \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' &= o \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z - \delta'' &= o \end{aligned}$$

Si le point $(x, y, z,)$ doit appartenir au plan (A, B, Γ, Δ), on a, en plus, la relation

$$Ax + By + \Gamma z - \Delta = o.$$

Digitized by Google

L'élimination de x, y, z, conduit à l'équation

$$(2)\quad \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix} = o$$

Si dans cette équation α, β, γ, δ, sont donnés, et A, B, Γ, Δ variables nous avons l'équation tangentielle du point (x, y, z) dont la trajectoire a, dans le mouvement indirect, pour plan osculateur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Si au contraire A, B, Γ, Δ sont fixes, et α, β, γ, δ variables, l'équation (2) représente l'enveloppe des plans osculateurs aux trajectoires, dans le mouvement indirect des points du système qui sont situés dans le plan (A, B, Γ, Δ). On voit que cette enveloppe est de la troisième classe.

Proposons-nous de trouver le lieu des points tels que les plans osculateurs de leurs trajectoires, dans le mouvement inverse, passent par une même droite D.

Soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$, deux plans passant par cette droite ; on aura, pour les coordonnées d'un plan quelconque Π passant par la droite,

$$\frac{\alpha_1 + \rho\alpha_2}{1+\rho},\ \frac{\beta_1 + \rho\beta_2}{1+\rho},\ \frac{\gamma_1 + \rho\gamma_2}{1+\rho},\ \frac{\delta + \rho\delta_2}{1+\rho},$$

$$\text{ou}\quad m\alpha_1 + n\alpha_2,\ m\beta_1 + n\beta_2,\ m\gamma_1 + n\gamma_2,\ m\delta_1 + n\delta_2\ ;$$

$$\text{en posant}\quad m = \frac{1}{1+\rho},\ n = \frac{1}{1+\rho},\ \text{d'où}\ m + n = 1.$$

Substituant ces coordonnées à α, β, γ, δ dans l'équation (2), on obtient l'équation tangentielle du point qui a Π pour plan osculateur, dans le mouvement inverse.

En développant ce déterminant, on a

$$(3)\quad \begin{aligned} & m^3 \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 & \delta'_1 \\ \alpha''_1 & \beta''_1 & \gamma''_1 & \delta''_1 \end{vmatrix} + m^2 n \left\{ \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 & \delta'_1 \\ \alpha''_2 & \beta''_2 & \gamma''_2 & \delta''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 & \delta'_2 \\ \alpha''_1 & \beta''_1 & \gamma''_1 & \delta''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 & \delta'_1 \\ \alpha''_1 & \beta''_1 & \gamma''_1 & \delta''_1 \end{vmatrix} \right\} \\ & + mn^2 \left\{ \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 & \delta'_2 \\ \alpha''_2 & \beta''_2 & \gamma''_2 & \delta''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 & \delta'_1 \\ \alpha''_2 & \beta''_2 & \gamma''_2 & \delta''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 & \delta'_2 \\ \alpha''_1 & \beta''_1 & \gamma''_1 & \delta''_1 \end{vmatrix} \right\} + n^3 \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 & \delta'_2 \\ \alpha''_2 & \beta''_2 & \gamma''_2 & \delta''_2 \end{vmatrix} = o \end{aligned}$$

Cette équation s'écrit d'une manière abrégée

$$(3)'\quad Pm^3 + Qm^2 n + Rmn^2 + Sn_3 = o,$$

P, Q, R, S, étant des fonctions linéaires de A, B, Γ, Δ.

Digitized by Google

Si l'on cherche les points satisfaisant à l'équation (3)′ qui sont situés dans un plan (A_0, B_0, Γ_0, Δ_0) il faut substituer à A, B, Γ, Δ, dans cette équation, les coordonnées de ce plan, et à n, sa valeur $1 - m$. On obtient ainsi une équation du troisième degré en m ; il y a donc, en général, trois points dans un plan quelconque, et le lieu cherché est une cubique gauche.

Quand la droite D est dans le plan double xOy, on a $\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \frac{\beta_1}{\beta'_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma'_1} = \frac{\delta_1}{\delta'_1}$, et l'équation (3)′ devient

$$Qm^2 + Rmn + Sn^2 = o,$$

et le lieu se réduit à une conique : $R^2 - 4SQ = o$.

Il existe en général trois plans tels que l'on ait $\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\gamma'}{\gamma''} = \frac{\delta'}{\delta''}$; quand le plan α_1, β_1, γ_1, δ_1 est un de ces plans, on obtient la conique précédente. Si le plan α_2, β_2, γ_2, δ_2 satisfait aussi à la même condition, c'est-à-dire si la droite D est une des trois droites d'intersection de ces trois plans, la relation (3)′ devient $Qm + Rn = o$, et le lieu devient une droite.

Proposons-nous d'obtenir les équations ponctuelles de la cubique représentée par l'équation (3)′. A cet effet, substituons dans les équations (1) à α', β', γ', δ', α'', β'', γ'', δ'', leurs expressions en fonction de α, β, γ, δ, et ordonnons par rapport à ces lettres :

$$(\lambda x + ry)\alpha + (\lambda y - rx)\beta + \lambda z\gamma - 2\lambda\delta = o$$

$$[x(\lambda' + \lambda^2 - r^2) + y(r' + 2\lambda r) - u'']\alpha + [y(\lambda' + \lambda^2 - r^2) - x(r' + 2\lambda r) - v'']\beta + [(\lambda' + \lambda^2)z - p'y - w'']\gamma - 2(2\lambda^2 + \lambda')\delta = o :$$

où, sous une forme abrégée,

$$(4) \qquad \begin{aligned} X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma - 2\lambda\delta &= o \\ X''\alpha + Y''\beta + Z''\gamma - 2(2\lambda^2 + \lambda')\delta &= o \end{aligned}$$

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) deux points de la droite D, on a aussi :

$$(5) \qquad \begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - \delta &= o \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 - \delta &= o \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta &= o \end{aligned}$$

Il faut éliminer α, β, γ, δ entre les équations (4) et (5).

Éliminons d'abord δ ; on a

$$(x - x_1)\alpha + (y - y_1)\beta + (z - z_1)\gamma = o$$

$$(x_2 - x_1)\alpha + (y_2 - y_1)\beta + (z_2 - z_1)\gamma = o$$

$$(X' - 2\lambda x_1)\alpha + (Y' - 2\lambda y_1)\beta + (Z' - 2\lambda z_1)\gamma = o$$

$$[X'' - 2(2\lambda^2 + \lambda')x_1]\alpha + [Y'' - 2(2\lambda^2 + \lambda')y_1]\beta + [Z'' - 2(2\lambda^2 + \lambda')z_1]\gamma = o$$

Digitized by Google

L'élimination de α, β, γ donne les deux équations :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X'-2\lambda x_1 & Y'-2\lambda y_1 & Z'-2\lambda z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = o \quad \begin{vmatrix} X''-2(2\lambda^2+\lambda')x_1 & Y''-2(2\lambda^2+\lambda')y_1 & Z''-2(2\lambda^2+\lambda')z_1 \\ X'-2\lambda x_1 & Y'-2\lambda y_1 & Z'-2\lambda z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = o$$

Ce sont les équations de deux hyperboloïdes qui ont en commun la génératrice

$$\frac{X'-2\lambda x_1}{x_2-x_1} = \frac{Y'-2\lambda y_1}{y_2-y_1} = \frac{Z'-2z_1}{z_2-z_1},$$

et se coupent, par conséquent, suivant une cubique gauche.

2. — Nous venons d'étudier, au point de vue des éléments du second ordre, les propriétés relatives au déplacement d'un plan, en envisageant particulièrement le point par lequel il passe, dans trois positions consécutives, ou qui dans le mouvement indirect, a pour plan osculateur le plan considéré. Il est intéressant de rechercher les plans pour lesquels ces points sont à l'infini, ou, ce qui revient au même, les plans qui engendrent, au troisième ordre près, un élément de surface cylindrique.

Dans ce cas, les trois plans

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha x + \beta x + \gamma z - \delta &= o \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' &= o \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z - \delta'' &= o \end{aligned}$$

transportés à l'origine, passent par une même droite, et l'on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = o$$

En développant ce déterminant, et remplaçant α', β', γ', α'', β'', γ'' par leurs expressions en fonction de α, β, γ, on trouve l'équation

$$(5) \quad p'\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + r^2\gamma(\alpha^2+\beta^2) = o,$$

qui est d'un cône du troisième ordre. Il est à remarquer que cette expression est indépendante de λ. Ainsi les plans en question sont parallèles aux plans tangents au cône (5).

Si l'on a, de plus,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \alpha' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix} = o$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \delta = \frac{r\beta\gamma(\alpha u'' + \beta v'' + \gamma w'')}{p'r\beta^2 - \beta\gamma[r(\lambda^2 + \lambda') - \lambda r'] + p'\lambda\alpha\beta + \lambda r^2\alpha\gamma}.$$

les plans (1) passent par la même droite.

Il en résulte que tout plan appartenant à la développable définie par les équations (5) et (6), passe, à trois instants consécutifs, par la même droite.

On a vu que les plans tangents à cette développable sont parallèles au cône du troisième degré (5). Pour achever de la représenter, cherchons sa podaire relative à l'origine.

La perpendiculaire menée de l'origine au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$, a pour équations $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$; Substituons x, y, z, à α, β, γ dans l'équation (5), et nous avons le cône du troisième ordre

$$(5)' \qquad p'y(x^2 + y^2 + z^2) + r^2 z(x^2 + y^2) = o,$$

qui contient la podaire.

D'autre part, on a $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha x + \beta y + \gamma z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\delta}$;

d'où $\alpha = \frac{\delta x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\beta = \frac{\delta y}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\gamma = \frac{\delta z}{x^2 + y^2 + z^2}$

Substituons dans (6), il vient

$$(x^2 + y^2 + z^2)\{p'ry^2 - yz[r^2(\lambda^2 + \lambda') - \lambda r'] + p'\lambda xy + \lambda r^2 xz\} = ryz(u''x + v''y + w''z).$$

Ainsi la podaire est l'intersection d'un cône du troisième degré avec une surface du quatrième degré.

Éléments du second ordre dans le déplacement d'une droite.

1. — Soient L, M, N, α, β, γ, les coordonnées d'une droite; les conditions pour que cette droite passe, à trois instants consécutifs infiniment voisins, par le même point (a, b, c), sont exprimées par les relations

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} L = c\beta - b\gamma & L' = c\beta' - b\gamma' & L'' = c\beta'' - b\gamma'' \\ M = a\gamma - c\alpha & M' = a\gamma' - c\alpha' & M'' = a\gamma'' - c\alpha'' \\ N = b\alpha - a\beta & N' = b\alpha' - a\beta' & N'' = b\alpha'' - a\beta'' \end{array}$$

Ces relations ne sont pas toutes distinctes, en vertu de certaines identités auxquelles satisfont les coordonnées d'une droite et les coefficients de leurs développements.

Digitized by Google

Écrivons :

$$L_1 = L + L't + L''\frac{t^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$M_1 = M + M't + M''\frac{t^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$N_1 = N + N't + N''\frac{t^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$\alpha_1 = \alpha + \alpha't + \alpha''\frac{t^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$\beta_1 = \beta + \beta't + \beta''\frac{t^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$\gamma_1 = \gamma + \gamma't + \gamma''\frac{t^2}{2} + \ldots.$$

La relation $L_1\alpha_1 + M_1\beta_1 + N_1\gamma_1 = o$ doit être satisfaite à toute époque t ; si donc nous y remplaçons les coordonnées par leurs développements, nous aurons les identités en question en égalant séparément à zéro les coefficients des puissances de t. On obtient ainsi :

$$(2)\ L\alpha' + M\beta' + N\gamma' + L'\alpha + M'\beta + N'\gamma = o$$
$$(3)\ 2(L'\alpha' + M'\beta' + N'\gamma') + L\alpha'' + M\beta'' + N\gamma'' + L''\alpha + M''\beta + N''\gamma = o.$$

En vertu de l'identité (2), on obtient une identité en ajoutant les deux premiers groupes des équations (1), après avoir multiplié respectivement ces équations par α', β', γ', α, β, γ. On obtient aussi une identité, en vertu de l'identité (3), en ajoutant ensemble les neuf équations (1) après avoir multiplié respectivement celles du premier groupe par α'', β'', γ'', celles du second par $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$, et celles du troisième par α, β, γ.

Ces neuf équations se ramènent donc à sept équations distinctes.

Si entre ces sept équations homogènes et linéaires relativement aux coordonnées de la droite, on élimine ces coordonnées, on obtient deux équations qui définissent le lieu de (a, b, c). Or on peut voir aisément que ce lieu est la cubique des inflexions dans le mouvement inverse. En effet, si, dans le mouvement direct, la droite D passe, à 3 moments consécutifs par le point (a, b, c), dans le mouvement indirect, ce point restera, à ces 3 moments, sur la droite D, et il appartient ainsi à la cubique des inflexions relative à ce mouvement.

La 3me équation du premier groupe peut être remplacée par la relation

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = o,$$

qui exprime que L, M, N, α, β, γ sont des coordonnées de droites. Si donc, entre les six équations qui restent on élimine a, b, c, on obtient trois équations entre les six coordonnées de droites. Ces équations peuvent s'écrire

$$(4)\quad \begin{vmatrix} L & \beta & \gamma \\ L' & \beta' & \gamma' \\ L'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = o \quad \begin{vmatrix} M & \alpha & \gamma \\ M' & \alpha' & \gamma' \\ M'' & \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix} = o \quad \begin{vmatrix} N & \alpha & \beta \\ N' & \alpha' & \beta' \\ N'' & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} = o$$

Digitized by Google

Chacune de ces équations représente un complexe du 3me ordre ; et le lieu de la droite est la surface commune à ces trois complexes.

2. — Nous allons traiter la question corrélative, c'est-à-dire chercher les droites qui, dans trois positions consécutives infiniment voisines, sont situées dans un même plan.

Soit $Ax + By + \Gamma z + 1 = o$, l'équation de ce plan. Les coordonnées de la droite devront satisfaire aux équations :

$$(5)\quad \begin{array}{lll} \alpha = BN - M\Gamma & \alpha' = BN' - M'\Gamma & \alpha'' = BN'' - M''\Gamma \\ \beta = \Gamma L - NA & \beta' = \Gamma L' - N'A & \beta'' = \Gamma L'' - N''A \\ \gamma = AM - LB & \gamma' = AM' - L'B & \gamma'' = AM'' - L''B \end{array}$$

On voit, comme dans la question précédente, que, en vertu des identités (2) et (3), les équations (5) se réduisent à sept équations distinctes.

Si, entre ces sept équations linéaires et homogènes relativement aux coordonnées de la droite, on élimine ces coordonnées, on obtient les deux équations en A, B, Γ, qui définissent la développable, lieu du plan. On voit aisément que cette développable est aussi le lieu des plans qui, dans le mouvement inverse, passent, à trois instants consécutifs, par la même droite.

Mais si dans ces mêmes équations on élimine les coordonnées du plan, on obtient, entre les coordonnées de la droite, trois équations qui définissent la surface, lieu géométrique de la droite.

Ces équations sont

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \alpha & N & M \\ \alpha' & N' & M' \\ \alpha'' & N'' & M'' \end{vmatrix} = o \quad \begin{vmatrix} \beta & L & N \\ \beta' & L' & N' \\ \beta'' & L'' & N'' \end{vmatrix} = o \quad \begin{vmatrix} \gamma & L & M \\ \gamma' & L' & M' \\ \gamma'' & L'' & M'' \end{vmatrix} = o$$

Remarquons que tout plan perpendiculaire à la droite reste perpendiculaire au plan qui contient la droite dans ses trois positions successives, et engendre par conséquent dans son déplacement un élément de cylindre. Par suite, les coordonnées α, β, γ satisfont à la relation trouvée précédemment

$$p'\beta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + r^2\gamma(\alpha^2 + \beta^2) = o,$$

et les génératrices de la surface (6) sont parallèles aux génératrices du cône du troisième ordre

$$p'y(x^2 + y^2 + z^2) + r^2 z(x^2 + y^2) = o.$$

3. — Toutes les droites du système qui sont parallèles aux génératrices de ce cône restent, à 3 instants consécutifs, parallèles à un même plan, ou encore rencontrent la droite à l'infini de ce plan. Nous allons rechercher l'ensemble

Digitized by Google

des droites D qui rencontrent une même droite donnée Δ à trois instants consécutifs.

Soient L, M, N, α, β, γ, les coordonnées de la droite mobile D, et P, Q, R, ρ, μ, ν celles de la droite fixe Δ.

On doit avoir

$$(7)\quad \begin{aligned} &P\alpha + Q\beta + R\gamma + \rho L + \mu M + \nu N = o \\ &P\alpha' + Q\beta' + R\gamma' + \rho L' + \mu M' + \nu N' = o \\ &P\alpha'' + Q\beta'' + R\gamma'' + \rho L'' + \mu M'' + \nu N'' = o \end{aligned}$$

Ces trois équations, linéaires par rapport aux coordonnées de la droite D, définissent une quadrique qui est le lieu de cette droite.

Le mouvement indirect permet bien de se rendre compte de ce résultat.

Remarquons, en effet, que si, à trois instants consécutifs, la droite D rencontre la droite Δ, inversement, dans le mouvement indirect, la droite Δ rencontre la droite D dans ses trois positions successives Δ, Δ_1, Δ_2. *Le lieu de la droite* D *est donc l'hyperboloïde défini par ces trois droites.*

Si Δ est une droite qui, dans le mouvement indirect, reste parallèle à un même plan, dans trois positions infiniment voisines, le lieu de D est un paraboloïde.

Remarquons enfin que les équations (7), quand P, Q, R, ρ, μ, ν, ne sont pas des coordonnées de droites, c'est-à-dire ne satisfont pas à la condition $P\rho + Q\mu + R\nu = o$, expriment que la droite D appartient, à trois instants consécutifs, à un même complexe linéaire donné.

On voit aisément, soit par le calcul, soit par la considération du mouvement indirect, qu'il *y a deux droites* D, *réelles ou imaginaires, qui dans quatre positions successives infiniment voisines rencontrent une droite donnée* Δ. On voit même que, D étant une de ces deux droites, il existe une autre droite Δ' que D rencontre dans ses quatre positions successives.

4. — Si D doit rencontrer Δ dans une cinquième position infiniment voisine, D ne peut plus être arbitraire ; on doit avoir

$$(8)\quad \begin{aligned} &\alpha P + \beta Q + \gamma R + \rho L + \mu M + \nu N = o \\ &\alpha' P + \beta' Q + \gamma' R + \rho L' + \mu M' + \nu N' = o \\ &\alpha'' P + \beta'' Q + \gamma'' R + \rho L'' + \mu M'' + \nu N'' = o \\ &\alpha''' P + \beta''' Q + \gamma''' R + \rho L''' + \mu M''' + \nu N''' = o \\ &\alpha^{\text{iv}} P + \beta^{\text{iv}} Q + \gamma^{\text{iv}} R + \rho L^{\text{iv}} + \mu M^{\text{iv}} + \nu N^{\text{iv}} = o \end{aligned}$$

Les équations (8) jointes à la relation $\rho P + \mu Q + \nu R = o$, sont surabondantes pour déterminer les coordonnées de Δ ; mais il n'en sera pas de même

Digitized by Google

si les coordonnées de D sont telles que l'une des équations (8) se déduise identiquement des quatre autres, seules distinctes.

On doit avoir, pour cela, les relations :

$$(9)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{\text{IV}} \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' & \beta^{\text{IV}} \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' & \gamma^{\text{IV}} \\ L & L' & L'' & L''' & L^{\text{IV}} \\ M & M' & M'' & M''' & M^{\text{IV}} \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{\text{IV}} \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' & \beta^{\text{IV}} \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' & \gamma^{\text{IV}} \\ L & L' & L'' & L''' & L^{\text{IV}} \\ N & N' & N'' & N''' & N^{\text{IV}} \end{vmatrix} = o$$

Les équations (9) définissent la congruence à laquelle appartient la droite D ; le mouvement inverse montre que Δ appartient à une congruence du même ordre.

Enfin, pour que la droite D rencontre une même droite dans six positions successives infiniment voisines, il faut joindre aux équations (8) l'équation

$$(8)'\quad \alpha^{\text{V}} P + \beta^{\text{V}} Q + \gamma^{\text{V}} R + \rho L^{\text{V}} + \mu M^{\text{V}} + \nu N^{\text{V}} = o\ ;$$

ce qui amène à joindre aux équations (9) les équations

$$(10)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{\text{V}} \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' & \beta^{\text{V}} \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' & \gamma^{\text{V}} \\ L & L' & L'' & L''' & L^{\text{V}} \\ M & M' & M'' & M''' & M^{\text{V}} \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{\text{V}} \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' & \beta^{\text{V}} \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' & \gamma^{\text{V}} \\ L & L' & L'' & L''' & L^{\text{V}} \\ N & N' & N'' & N''' & N^{\text{V}} \end{vmatrix} = o$$

Ainsi, il y a un nombre fini de droites D qui dans six positions successives infiniment voisines s'appuient sur une même droite.

Enfin, si dans les équations (8) P, Q, R, ρ, μ, ν ne sont pas assujettis à représenter les coordonnées d'une droite, mais seulement les paramètres d'un complexe, ces paramètres sont déterminés par les équations (8). Si on leur adjoint l'équation (8)′, on a, en éliminant P, Q, R, ρ, μ, ν entre ces six équations, la condition pour que la droite D fasse partie, dans six positions successives infiniment voisines, d'un même complexe linéaire. Le résultant est le déterminant de L, M, N, α, β, γ et de leurs cinq premières dérivées, et représente un complexe du sixième ordre.

Par une marche analogue à celle de la question qui précède, on arriverait aisément à écrire les équations de la congruence, de la surface, ou du groupe des droites qui dans sept, huit, neuf positions successives infiniment voisines, font partie du même complexe linéaire.

Digitized by Google

Axes de courbure. — Sphères osculatrices. — Sphères surosculatrices.

1. — L'axe de courbure de la trajectoire d'un point (x, y, z) du système est l'intersection des deux plans

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=o$$
$$(X-x)\,d^2x+(Y-y)\,d^2y+(Z-z)\,d^2z=dx^2+dy^2+dz^2$$

A l'époque $t=o$. ces équations deviennent

$$a'X+b'Y+c'Z=aa'+bb'+cc'$$
$$a''X+b''Y+c''Z=aa''+bb''+cc''+a'^2+b'^2+c'^2.$$

Les coefficients des premiers membres sont des fonctions linéaires de a, b, c; les identités qui ont été trouvées au début, et qui lient les coefficients des développements des coordonnées d'un point, montrent que les seconds membres sont des fonctions linéaires de a, b, c et de $a^2+b^2+c^2$.

On trouve, en développant,

$$X(-br+\lambda a)+Y(ar+\lambda b)+Z.\lambda c=\lambda(a^2+b^2+c^2)$$

$$X[u''-br'+a\lambda'-a(r^2-\lambda^2)-2\lambda br]+Y[v''+ar'-cp'+b\lambda'-b(r^2-\lambda^2)+2\lambda ar]+Z(w''+bp'+c\lambda'+c\lambda^2)=$$
$$=(2\lambda^2+\lambda')(a^2+b^2+c^2)+au''+bv''+cw''$$

La forme de ces équations montre que le lieu des points tels que les axes de courbure de leurs trajectoires passent par un point donné, est un cercle.

L'axe de courbure est complètement indéterminé si l'on a

$$\frac{u''-br'+a\lambda'-a(r^2-\lambda^2)2\lambda br}{-br+\lambda a}=\frac{v''+ar'-cp'+b\lambda'-b(r^2-\lambda^2)+2\lambda ar}{ar+\lambda b}=\frac{w''+bp'+c\lambda'+c\lambda^2}{\lambda c}$$
$$=\frac{(2\lambda^2+\lambda')(a^2+b^2+c^2)+au''+bv''+cw''}{\lambda(a^2+b^2+c^2)}$$

Multiplions les deux termes de la première fraction par a, ceux de la seconde par b, ceux de la troisième par c, et ajoutons termes à termes; puis retranchant des termes de la quatrième, il vient

$$(\lambda^2+r^2)(a^2+b^2)+\lambda^2c^2=o.$$

équation d'un cône imaginaire qui coupe la cubique d'inflexion en des points où l'axe de courbure est indéterminé. Remarquons que ce cône est aussi le lieu des points imaginaires dont la vitesse est nulle.

Digitized by Google

2. — Proposons-nous maintenant de trouver *le lieu des axes de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite.*

Soit la droite $\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=o$. On aura le lieu cherché en remplaçant a, b, c par $a+\alpha\rho$, $b+\beta\rho$, $c+\gamma\rho$ dans les équations de l'axe de courbure, puis en éliminant ρ. On obtient ainsi.

$$X(-br+\lambda a)+Y(ar+\lambda b)+Z.\lambda c-\lambda(a^2+b^2+c^2)$$
$$+\rho[(\lambda a-\beta r)X+(r\alpha+\lambda\beta)Y+\lambda\gamma Z-2\lambda(a\alpha+b\beta+c\gamma)]-\lambda\rho^2=o$$

$$X[u''-br'+a\lambda'-a(r^2-\lambda^2)-2\lambda br]+Y[v''+ar'-cp'+b\lambda'-b(r^2-\lambda^2)+2\lambda ar]$$
$$+Z(w''+bp'+c\lambda'+c\lambda^2)-(2\lambda^2+\lambda')(a^2+b^2+c^2)-au''+bv''+cw'')$$

$$+\rho\{X[-\beta r'+\alpha\lambda'-\alpha(r^2-\lambda^2)-2\lambda\beta r]+Y[\alpha r'-\gamma p'+\beta\lambda'-\beta(r^2-\lambda^2)+2\lambda\alpha r]$$
$$+Z[\beta p'+\gamma(\lambda'+\lambda^2)]-(2\lambda^2+\lambda')(a\alpha+b\beta+c\gamma)-(\alpha u''+\beta v''+\gamma w'')\}-(2\lambda^2+\lambda')\rho^2=o;$$

Ces deux équations sont de la forme

$$A+B\rho-\lambda\rho^2=o;\ A'+B'\rho-(2\lambda^2+\lambda')\rho^2=o;$$

A, B, A', B', étant des fonctions du premier degré en X, Y, Z.

De la première on tire $\rho^2=\frac{A+B\rho}{\lambda}$; portant dans la seconde, on a

$$A'+B'\rho-(2\lambda^2+\lambda')\frac{A+B\rho}{\lambda}=o,$$

ou $$\rho[\lambda B'-(2\lambda^2+\lambda')B]+\lambda A'-(2\lambda^2+\lambda')A=o;$$

d'où $\rho=\frac{A(2\lambda^2+\lambda')-\lambda A'}{\lambda B'-(2\lambda^2+\lambda')B}$. Portant maintenant cette valeur de ρ dans la première équation, il vient

$$A+B\frac{A(2\lambda^2+\lambda')-\lambda A'}{\lambda B'-(2\lambda^2+\lambda')B}-\lambda\frac{[A(2\lambda^2+\lambda')-\lambda A']^2}{[\lambda B'-(2\lambda^2+\lambda')B]^2}=o$$

ou $A[\lambda B'-(2\lambda^2+\lambda')B]^2+B[A(2\lambda^2+\lambda')-\lambda A'][\lambda B'-(2\lambda^2+\lambda')B]-\lambda[A(2\lambda^2+\lambda')-\lambda A']^2=o$

C'est *une surface du troisième degré.*

3. — Soit un point du système dont les coordonnées sont, à l'époque t, x, y, z; les coordonnées X, Y, Z du centre de la sphère osculatrice à la trajectoire de ce point sont données par les équations

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=o$$
$$(X-x)\,d^2x+(Y-y)\,d^2y+(Z-z)\,d^2z=dx^2+dy^2+dz^2$$
$$(X-x)\,d^3x+(Y-y)\,d^3y+(Z-z)\,d^3z=3\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)$$

Remplaçons x, y, z et leurs différentielles par leurs développements suivant les puissances de t, les équations précédentes deviennent, à l'époque $t=o$:

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{cases} a'X + b'Y + c'Z = aa' + bb' + cc' \\ a''X + b''Y + c''Z = aa'' + bb'' + cc'' + a'^2 + b'^2 + c'^2 \\ a'''X + b'''Y + c'''Z = aa''' + bb''' + cc''' + 3(a'a'' + b'b'' + c'c'') \end{cases}$$

En vertu d'identités précédemment obtenues, les second membres se montrent des fonctions linéaires de a, b, c et de $a^2 + b^2 + c^2$. On trouve ainsi :

$$(2)\quad \begin{cases} a'X + b'Y + c'Z = \lambda(a^2 + b^2 + c^2) \\ a''X + b''Y + c''Z = au'' + bv'' + cw'' + (2\lambda^2 + \lambda')(a^2 + b + c^2) \\ a'''X + b'''Y + c'''Z = au''' + bv''' + cw''' + 3(a'u'' + b'v'' + c'w'') \\ \qquad\qquad + (4\lambda^3 + 6\lambda\lambda' + \lambda'')(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

Comme a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c''' sont des fonctions linéaires de a, b, c, les équations (2) montrent que les points (a, b, c) tels que les sphères osculatrices de leurs trajectoires aient pour centre un point donné (X, Y, Z) ou encore, qui restent à trois instants consécutifs à la même distance d'un point (X, Y, Z), sont les points communs à trois sphères, et sont, par conséquent, au nombre de deux.

Si le point a, b, c se trouve sur la surface du 3e ordre

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0$$

le centre de la sphère osculatrice est rejeté à l'infini ; mais on voit que cette surface a déjà été trouvée comme le lieu des points dont les trajectoires sont surosculatrices à un plan.

D'après cela, il existe en général, sur une droite trois points dont les trajectoires sont telles que le centre de leur sphère osculatrice est rejeté à l'infini.

Par suite, *si on considère le lieu des centres des sphères osculatrices relatives à tous les points d'une droite*, on voit *que ce lieu est une courbe qui rencontre le plan de l'infini en 3 points ; c'est donc une cubique gauche,* située sur la surface du troisième ordre, lieu des axes de courbure des trajectoires des points de cette droite.

Remarquons que si à l'équation (3), on adjoint l'équation

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix} = 0$$

d', d'', d''' représentant les seconds membres des équations (2), les trois plans représentés par ces équations (2) passent par une même droite, et le point (a, b, c) reste, dans quatre positions successives, sur le même cercle.

Digitized by Google

L'équation (4) représente une surface du quatrième ordre, et l'intersection des deux surfaces (3) et (4) est une courbe du douzième ordre ; mais cette intersection se décompose en une courbe du neuvième ordre, et la cubique $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''}$, dont les points ne jouissent pas, en général, de la propriété énoncée.

Cela posé, et revenant au lieu des centres des sphères osculatrices aux trajectoires des divers points d'une droite, si cette droite rencontre en un point la courbe du neuvième ordre qui vient de se présenter, l'axe de courbure de la trajectoire de ce point fait partie du lieu, qui se compose alors de cette droite et d'une conique ; si la droite rencontre la courbe en deux points, le lieu se compose de deux axes de courbure, et d'une droite.

4. — La trajectoire du point (a, b, c) est surosculatrice à une sphère de centre (X, Y, Z) si l'on peut satisfaire aux trois relations

$$\begin{aligned}
a'X + b'Y + c'Z &= aa' + bb' + cc' \\
a''X + b''Y + c''Z &= aa'' + bb'' + cc'' + a'^2 + b'^2 + c'^2 \\
a'''X + b'''Y + c'''Z &= aa''' + bb''' + cc''' + 3(a'a'' + b'b'' + c'c''). \\
a^{\text{iv}}X + b^{\text{iv}}Y + c^{\text{iv}}Z &= aa^{\text{iv}} + bb^{\text{iv}} + cc^{\text{iv}} + 4(a'a''' + b'b''' + c'c''') + 3(a''^2 + b''^2 + c''^2).
\end{aligned}$$

Désignons par d', d'', d''', d^{iv} les seconds membres qui, en vertu d'identités déjà obtenues, sont des fonctions linéaires de a, b, c, $a^2 + b^2 + c^2$; les équations deviennent

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned}
a'X + b'Y + c'Z &= d' \\
a''X + b''Y + c''Z &= d'' \\
a'''X + b'''Y + c'''Z &= d''' \\
a^{\text{iv}}X + b^{\text{iv}}Y + c^{\text{iv}}Z &= d^{\text{iv}}
\end{aligned} \right.$$

Pour que ces équations soient compatibles on doit avoir

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{\text{iv}} & b^{\text{iv}} & c^{\text{iv}} & d^{\text{iv}} \end{vmatrix} = o$$

Cette équation représente une surface du cinquième ordre.

Tout point (a, b, c) dont la trajectoire est surosculatrice à un cercle appartient à cette surface, car pour un tel point les trois premières équations (5) se réduisent à deux, les quatre équations (5) sont donc compatibles, et la relation (6) est satisfaite.

Le point (a, b, c) restera sur une même sphère dans six positions consécutives infiniment voisines si l'on a, en même temps que l'équation (6) la relation

Digitized by Google

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{\text{iv}} & b^{\text{iv}} & c^{\text{iv}} & d^{\text{iv}} \\ a^{\text{v}} & b^{\text{v}} & c^{\text{v}} & d^{\text{v}} \end{vmatrix} = o,$$

surface également du cinquième ordre.

L intersection des surfaces (6) et (7) est une courbe du vingt-cinquième ordre. Remarquons cependant que la courbe

$$(8)\quad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{iv}} & b^{\text{iv}} & c^{\text{iv}} \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \\ a^{\text{iv}} & b^{\text{iv}} & d^{\text{iv}} \end{vmatrix} = o$$

qui appartient aux deux surfaces se compose d'une courbe du neuvième degré, C_1, et d'une cubique :

$$\frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \frac{a^{\text{iv}}}{b^{\text{iv}}}.$$

Soient A', A'', A''', A^{iv}, A^{v} les positions que prend successivement le point A. Les équations (8) expriment que A' A'' A''' A^{iv} sont sur un même cercle C ; l'équation (6) exprime que le point A et le cercle C sont sur une même sphère ; l'équation (7) exprime que le cercle C et le point A^{v} sont sur une même sphère, différente en général de la précédente ; et l'on voit ainsi que l'intersection des surface (6) et (7) se décompose en une courbe du 16e ordre, et une courbe du neuvième ordre qui ne participe pas à la propriété en question.

Enfin, on exprime que les points A'', A''', A^{iv}, A^{v}, A^{vi} sont sur une même sphère en écrivant :

$$(9)\quad \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{\text{iv}} & b^{\text{iv}} & c^{\text{iv}} & d^{\text{iv}} \\ a^{\text{v}} & b^{\text{v}} & c^{\text{v}} & d^{\text{v}} \\ a^{\text{vi}} & b^{\text{vi}} & c^{\text{vi}} & d^{\text{vi}} \end{vmatrix} = o$$

Les points communs aux surfaces (6), (7) et (9) sont au nombre de 125 ; mais il faut en écarter un certain nombre.

Les points de la courbe C_1 ne répondent pas à la question ; or cette courbe donne avec la surface (9) 45 points d'intersection qu'il faut rejeter. De même les surfaces (8) et (9) comprennent dans leur intersection une courbe C_2 du neuvième degré qui rencontre la surface (7) en 45 points qu'il faut rejeter aussi. Il semble donc qu'il reste 35 points convenant à la question. Mais il faut remarquer que les courbes C_1 et C_2 ont sept points communs

En effet, les équations de la courbe C_2 sont

Digitized by Google

$$(10)\quad \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & c^{\text{V}} \end{vmatrix} = o \qquad \begin{vmatrix} a''' & b''' & d''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & d^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & d^{\text{V}} \end{vmatrix} = o$$

Les équations (8) et (10) sont satisfaites à la fois par les coordonnées des points déterminées par les relations

$$(11)\quad \frac{a'''}{a^{\text{IV}}} = \frac{b'''}{b^{\text{IV}}} = \frac{c'''}{c^{\text{IV}}} = \frac{d'''}{d^{\text{IV}}}$$

Ces points ont donc été enlevés deux fois ; il est facile de les compter. Ils sont, en effet, communs aux trois surfaces :

$$a'''\, c^{\text{IV}} - c'''\, a^{\text{IV}} = o$$
$$b'''\, c^{\text{IV}} - c'''\, b^{\text{IV}} = o$$
$$d'''\, c^{\text{IV}} - c'''\, d^{\text{IV}} = o$$

Or ces trois surfaces ont une génératrice commune ; $c''' = o$, $c^{\text{IV}} = o$, qui ne convient pas.

Les deux première surfaces sont deux quadriques qui ont en commun, outre cette génératrice, une cubique gauche, rencontrant la génératrice en deux points.

Cette cubique rencontre la troisième surface, qui est du troisième ordre, en neuf points ; mais deux de ces neuf points sont sur la génératrice commune. Il en reste donc sept qu'il faut restituer ; et le nombre des points dont les trajectoires ont un contact du sixième ordre avec une sphère, est de $35 + 7 = 42$.

Ainsi, *il y a à chaque instant, quarante-deux points du système qui ont un contact du sixième ordre avec une sphère.*

Détermination analytique du pôle double et de l'axe instantané, connaissant les tangentes aux trajectoires des trois points du Système.

Je me propose de résoudre par l'analyse ce problème dont j'ai donné plus haut plusieurs solutions géométriques.

1. — Soient (a, b, c) ; (a', b', c') ; (a'', b'', c''), les trois points donnés du système, α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; les angles des vitesses de ces points avec les axes de coordonnées, qui sont trois axes rectangulaires quelconques ; enfin ρ, ρ', ρ'' représentent ces trois vitesses. On a les équations

$$(\text{I})\quad \begin{cases} \rho \cos\alpha = u' + cq - br + \lambda a \\ \rho \cos\beta = v' + ar - cp + \lambda b \\ \rho \cos\gamma = w' + bp - aq + \lambda c \end{cases}$$

Digitized by Google

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\rho'\cos\alpha' = u' + c'q - b'r + \lambda a\\ \rho'\cos\beta' = v' + a'r - c'p + \lambda b'\\ \rho'\cos\gamma' = w' + b'p - a'q + \lambda c'\end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\begin{cases}\rho''\cos\alpha'' = u' + c''q - b''r + \lambda a''\\ \rho''\cos\beta'' = v' + a''r - c''p + \lambda b''\\ \rho''\cos\gamma'' = w' + b''p - a''q + \lambda c''\end{cases}$$

Nous avons ainsi neuf équations homogènes à dix inconnues : ρ, ρ', ρ'' ; u', v', w' ; p, q, r, λ. Elles permettent en général de déterminer les rapports de neuf inconnues à la dixième, λ par exemple.

Par chacun des trois points (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), menons un plan normal à la trajectoire correspondante, et admettons que ces trois plans se coupent en un point unique I à distance finie. Si nous prenons ce point pour origine des coordonnées, la droite qui joint l'origine à l'un quelconque des trois points donnés est normale à la trajectoire correspondante, et l'on a les relations

$$(1)\quad \begin{aligned} a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma &= o\\ a'\cos\alpha' + b'\cos\beta' + c'\cos\gamma' &= o\\ a''\cos\alpha'' + b''\cos\beta'' + c''\cos\gamma'' &= o\end{aligned}$$

Ceci posé, ajoutons les équations du groupe (I), après les avoir multipliées respectivement par a, b, c ; opérons de même sur les groupes (II) et (III), en les multipliant par a', b', c' ; a'', b'', c'' ; il vient, en vertu des relations (1) :

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} o = au' + bv' + cw' + \lambda(a^2 + b^2 + c^2)\\ o = a'u' + b'v' + c'w' + \lambda(a'^2 + b'^2 + c'^2)\\ o = a''u' + b''v' + c''w' + \lambda(a''^2 + b''^2 + c''^2)\end{cases}$$

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}$$

n'est pas nul, c'est-à-dire si les trois points donnés ne sont pas dans un même plan avec l'origine, les équations (IV) donnent des valeurs finies et déterminées pour $\frac{u'}{\lambda}, \frac{v'}{\lambda}, \frac{w'}{\lambda}$.

Interprétons géométriquement les équations (IV). Elles montrent que les trois points donnés sont sur la sphère $\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + u'x + v'y + w'z = o$, qui passe aussi par l'origine ; les coordonnées du centre de cette sphère étant

$$-\frac{u'}{2\lambda}, -\frac{v'}{2\lambda}, -\frac{w'}{2\lambda}.$$

Digitized by Google

Ainsi, l'on peut dire que si l'on désigne par ξ, η, ζ, les coordonnées du centre de la sphère parfaitement déterminée qui passe par les trois points donnés et l'origine I, on a

$$\frac{u'}{\lambda} = -2\xi, \frac{v'}{\lambda} = -2\eta, \frac{w'}{\lambda} = -2\zeta.$$

Ce résultat est facile à expliquer, si on remarque que les trois droites qui joignent l'origine I aux trois points ont, par suite de la construction même, ces trois points pour foyers, et que la sphère considérée n'est autre que la sphère Φ relative au point I. On sait alors que le diamètre passant par I est dirigé suivant la vitesse de ce point, et que cette vitesse est égale, en valeur absolue, au produit de ce diamètre par λ.

Nous pouvons profiter de ces considérations pour simplifier les équations du problème, en prenant pour axe des z le diamètre de la sphère qui passe par l'origine. On a alors $u' = v' = o$, et

$$\frac{w'}{\lambda} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{c} = -\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{c'} = -\frac{a''^2+b''^2+c''^2}{c''}$$

Les axes étant ainsi choisis, formons un nouveau groupe des deux premières équations des groupes (I), (II) et (III).

Nous avons alors

$$(V)\left\{\begin{array}{l} \rho\cos\alpha = cq - br + \lambda a \\ \rho\cos\beta = ar - cp + \lambda b \\ \rho'\cos\alpha' = c'q - b'r + \lambda a' \\ \rho'\cos\beta' = a'r - c'p + \lambda b' \\ \rho''\cos\alpha'' = c''q - b''r + \lambda a'' \\ \rho''\cos\beta'' = a''r - c''p + \lambda b'' \end{array}\right.$$

Ces six équations homogènes permettront de déterminer $\frac{\rho}{\lambda}, \frac{\rho'}{\lambda}, \frac{\rho''}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}$.

Pour cela, entre les deux premières équations, éliminons ρ ; il vient

$$o = c\cos\alpha.\,p + c\cos\beta.\,q - (b\cos\beta + a\cos\alpha)\,r + \lambda\,(a\cos\beta - b\cos\alpha)$$

Mais la 1re relation (1) $\quad a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = o,$

permet d'écrire $\quad c\cos\alpha.\,p + c\cos\beta.\,q + c\cos\gamma.\,r + \lambda\,(a\cos\beta - b\cos\alpha) = o$

De même $\quad c'\cos\alpha'.\,p + c'\cos\beta'.\,q + c'\cos\gamma'.\,r + \lambda\,(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha') = o$

$\quad c''\cos\alpha''.\,p + c''\cos\beta''.\,q + c''\cos\gamma''\,r + \lambda\,(a''\cos\beta'' - b''\cos\alpha'') = o$

Ce système permet de déterminer $\frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}$; en effet, le déterminant des inconnues est

Digitized by Google

$$c.\,c'.\,c'' \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{vmatrix}$$

Comme nous avons admis que les trois plans perpendiculaires en (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), aux trajectoires correspondantes se coupaient en un point unique à distance finie, on a

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{vmatrix} \lessgtr o$$

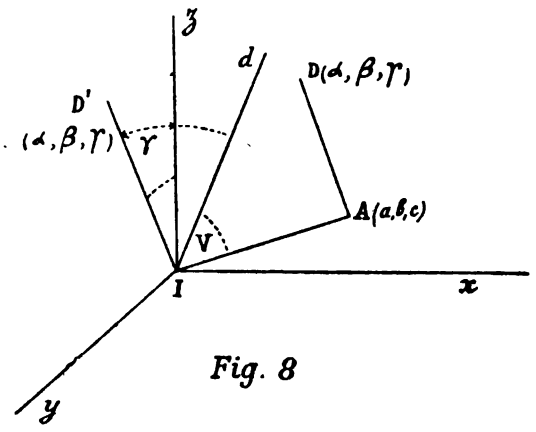


Fig. 8

On a d'ailleurs aussi $c\,c'\,c'' \lessgtr o$. En effet, le plan xIy est tangent à la sphère qui contient l'origine et les trois points donnés ; donc aucun de ceux-ci n'est dans le plan xIy.

Si nous désignons par θ, θ', θ'' les angles de l'axe instantané avec les tangentes aux trois trajectoires, et par ω la rotation instantanée autour de cet axe, les trois équations précédentes peuvent s'écrire

$$c\,\omega\cos\theta = \lambda\,(b\cos\alpha - a\cos\beta)$$
$$c'\,\omega\cos\theta' = \lambda\,(b'\cos\alpha' - a'\cos\beta')$$
$$c''\,\omega\cos\theta'' = \lambda\,(b''\cos\alpha'' - a''\cos\beta'')$$

Ces équations donnent les projections $\omega\cos\theta$, $\omega\cos\theta'$, $\omega\cos\theta''$ de la rotation sur les trois tangentes, et par conséquent l'axe et la rotation.

Pour interpréter géométriquement ces équations, écrivons l'une d'elles, la première par exemple, sous la forme $\frac{\omega}{\lambda}\cos\theta = \frac{b\cos\alpha - a\cos\beta}{c}$

Nous allons donner une signification géométrique remarquable du second membre. Pour cela, menons par Iz (fig. 8) un plan parallèle à la tangente D de la trajectoire du point A. L'équation de ce plan est $y\cos\alpha - x\cos\beta = o$. Il rencontre suivant la droite Id le plan mené par IA perpendiculairement à D ; donc Id est la projection de Iz sur le plan AId, et l'angle dIA ou V est l'angle de la droite IA avec le plan zId.

On a donc $\cos(90^\circ - V)$ ou $\sin V = \dfrac{b\cos\alpha - a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

d'où $\cos^2 V = \dfrac{(a^2+b^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) - (b\cos\alpha - a\cos\beta)^2 + c^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)(a^2+b^2+c^2)}$

Digitized by Google

Or, d'après une identité connue, on a

$$(a^2+b^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-(b\cos\alpha-a\cos\beta)^2=(a\cos\alpha+b\cos\beta)^2.$$

Mais $a\cos\alpha+b\cos\beta=-c\cos\gamma$;

on a donc $\cos^2 V=\dfrac{c^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta)(a^2+b^2+c^2)}$

$$\cos V=\frac{c}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;$$

d'où enfin $\operatorname{tg} V=\dfrac{b\cos\alpha-a\cos\beta}{c}$

Les équations qui donnent les projections de la rotation instantanée sont donc :

$$\frac{\omega}{\lambda}\cos\theta=\operatorname{tg} V\ ;\ \frac{\omega}{\lambda}\cos\theta'=\operatorname{tg} V'\ ;\ \frac{\omega}{\lambda}\cos\theta''=\operatorname{tg} V''.$$

Ces formules conduisent à une construction déjà obtenue par des considérations purement géométriques.

2. — Nous allons examiner successivement les hypothèses que nous avons écartées dans l'étude du cas général. Ainsi, nous admettrons actuellement que les tangentes aux trois trajectoires sont parallèles à un même plan, de sorte que les plans normaux menés par les trois points sont parallèles à une même droite, sans passer cependant par une même droite.

Nous prendrons pour origine le point A (a, b, c), et pour plan des xy, un plan parallèle aux trois tangentes. Nous avons alors $a=b=c=o$; et $\cos\gamma=\cos\gamma'=\cos\gamma''=o$.

Les troisièmes équations des groupes (I), (II) et (III) donnent $w'=o$; $o=b'p-a'q+\lambda c'$; $o=b''p-a''q+\lambda c''$.

Les deux dernières donnent

$$p=-\frac{\lambda(a'c''-a''c')}{a'b''-a''b'}\ ;\ q=\frac{\lambda(c'b''-b'c'')}{a'b''-a''b'}$$

Les deux premières équations du groupe I donnent $u'=\rho\cos\alpha$, $v'=\rho\cos\beta$; et les premières équations des groupes (II) et (III) donnent alors

$$\rho'\cos\alpha'=\rho\cos\alpha+c'q-b'r+\lambda a'$$
$$\rho'\cos\beta'=\rho\cos\beta+a'r-c'p+\lambda b'$$
$$\rho''\cos\alpha''=\ \cos\alpha+c''q-b''r+\lambda a''$$
$$\rho''\cos\beta''=\rho\cos\beta+a''r-c''p+\lambda b''$$

D'où

$$o=\rho(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')+c'(q\cos\beta'+p\cos\alpha')-r(b'\cos\beta'+a'\cos\alpha')+\lambda(a'\cos\beta'-b'\cos\alpha')$$
$$o=\rho(\cos\alpha\cos\beta''-\cos\beta\cos\alpha'')+c''(q\cos\beta''+p\cos\alpha'')-r(b''\cos\beta''+a''\cos\alpha'')+\lambda(a''\cos\beta''-b''\cos\alpha'')$$

Digitized by Google

Comme p et q sont connus en fonction de λ, ces deux équations déterminent ρ et r en fonction de λ ; le groupe précédent donne alors ρ' et ρ''. On a vu d'ailleurs que l'on a $u' = \rho \cos\alpha$, $v' = \rho \cos\beta$.

On voit aisément que le centre instantané se trouve dans le plan des trois points donnés.

3. — Considérons maintenant le cas où les trois plans normaux aux trajectoires passent par une même droite.

Prenons cette droite comme axe des z, l'origine étant un point quelconque de cette droite. On a $\cos\gamma = \cos\gamma' = \cos\gamma'' = o$; on aussi

$$\begin{aligned} a \cos\alpha + b \cos\beta &= o \\ a' \cos\alpha' + b' \cos\beta' &= o \\ a'' \cos\alpha'' + b'' \cos\beta'' &= o \end{aligned}$$

Les dernières équations des groupes I, (II) et (III) donnent

$$(1) \left\{ \begin{aligned} o &= w' + bp - aq + \lambda c \\ o &= w' + b'p - a'q + \lambda c' \\ o &= w' + b''p - a''q + \lambda c'' \end{aligned} \right.$$

Des équations

$$\begin{aligned} \rho \cos\alpha &= u' + cq - br + \lambda a \\ \rho \cos\beta &= v' + ar - cp + \lambda b \\ o &= w' + bp - aq + \lambda c \end{aligned}$$

on tire :

de même

$$\left. \begin{aligned} o &= au' + bv' + cw' + \lambda (a^2 + b^2 + c^2) \\ o &= a'u' + bv' + c'w' + \lambda (a'^2 + b'^2 + c'^2) \\ o &= a''u' + b''v' + c''w' + \lambda (a''^2 + b''^2 + c''^2) \end{aligned} \right\} (2)$$

Les six équations (1) et (2) sont homogènes par rapport aux six inconnues u', v', w', p, q, λ. Pour qu'elles soient satisfaites pour des valeurs des inconnues qui ne soient pas toutes nulles, il faut et il suffit que le déterminant Δ des inconnues soit nul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & a & b & c & o & o \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 & a' & b' & c' & o & o \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 & a'' & b'' & c'' & o & o \\ c & o & o & 1 & a & b \\ c' & o & o & 1 & a' & b' \\ c'' & o & o & 1 & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

Si $\Delta \leqq o$, on a $u' = v' = w' = p = q = \lambda = o$; le déplacement se réduit à une rotation sans homothétie autour de oz.

Digitized by Google

Si ce déterminant est nul, cinq des inconnues s'obtiendront en général au moyen de la sixième, λ par exemple ; ou bien encore on a une valeur bien déterminée pour $\frac{u'}{\lambda}, \frac{v'}{\lambda}, \frac{w'}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda}$; mais r reste indéterminé. Il n'y a donc pas un déplacement unique, et nous allons voir quel est, pour tous les déplacements possibles, le lieu du centre instantané.

Soit (x, y, z) ce centre ; on a

$$(3) \quad \begin{cases} o = u' + qz - ry + \lambda x \\ o = v' + rx - pz + \lambda y \\ o = w' + py - qx + \lambda z \end{cases}$$

La dernière équation est celle d'un plan bien déterminé qui contient le lieu.

On a une autre surface passant par le lieu en ajoutant les équations (3) après les avoir respectivement multipliées par x, y, z.

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{u'}{\lambda} x + \frac{v'}{\lambda} y + \frac{w'}{\lambda} z = o.$$

Le lieu est donc un cercle qui rencontre oz, car si l'on substitue $x = o$, $y = o$ dans l'équation du plan et dans celle de la sphère, on obtient le même résultat

$$z + \frac{w'}{\lambda} = o$$

Remarquons que le cercle, lieu du centre instantané, contient, d'après les équations (1) et (2) les trois points donnés. La relation $\Delta = o$ exprime donc que le cercle passant par ces trois points rencontre l'axe oz. Si cette condition géométrique n'est pas remplie, le seul déplacement possible est une rotation sans homothétie.

Le plan double a pour équation

$$p(X - x) + q(Y - y) + r(Z - z) = o,$$

ou

$$pX + qY + rZ = px + qy + rz.$$

Or on déduit des équations (3)

$$o = pu' + qv' + rw' + \lambda(px + qy + rz) ;$$

l'équation du plan devient donc

$$\frac{p}{\lambda} X + \frac{q}{\lambda} Y + \frac{r}{\lambda} Z = -\left(\frac{p}{\lambda} \cdot \frac{u'}{\lambda} + \frac{q}{\lambda} \cdot \frac{v'}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} \cdot \frac{w'}{\lambda}\right)$$

Dans cette équation, $\frac{r}{\lambda}$ est le seul paramètre variable, le plan passe donc par la droite fixe.

$$\frac{p}{\lambda} X + \frac{q}{\lambda} Y = -\left(\frac{p}{\lambda} \frac{u'}{\lambda} + \frac{q}{\lambda} \cdot \frac{v'}{\lambda}\right) ; \; Z = -\frac{w'}{\lambda}$$

Digitized by Google

4. — Nous allons voir que le cas où les trois points donnés sont en ligne droite conduit à un mouvement qui n'est autre que celui que nous venons d'étudier, comme nous l'avons d'ailleurs observé dans l'étude géométrique.

Prenons la droite qui contient les trois points pour axe des z ; le point (a, b, c) pour origine I ; pour axe Ix, une perpendiculaire au plan de l'axe Iz et de la tangente à la trajectoire du point I. On a ainsi $u' = a = b = c = a' = b' = a'' = b'' = o$.

Les trois groupes d'équations du cas général deviennent alors.

$$(1)\left\{\begin{array}{lll} & \rho' \cos\alpha' = c'q & \rho'' \cos\alpha'' = c''q \\ \rho \cos\beta = v' & \rho' \cos\beta' = v' - c'p & \rho'' \cos\beta'' = v' - c''p \\ \rho \cos\gamma = w' & \rho' \cos\gamma' = w' + \lambda c' & \rho'' \cos\gamma'' = w' + \lambda c'' \end{array}\right. ,$$

d'où

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} \rho' \cos\alpha' = c'q & \rho'' \cos\alpha'' = c''q \\ \rho' \cos\beta' = \rho \cos\beta - c'p & \rho'' \cos\beta'' = \rho \cos\beta - c''p \\ \rho' \cos\gamma' = \rho \cos\gamma + \lambda c' & \rho'' \cos\gamma'' = \rho \cos\gamma + \lambda c'' \end{array}\right.$$

Les premières équations des deux groupes (2) donnent $\rho' = \frac{c'q}{\cos\alpha'}$, $\rho'' = \frac{c''q}{\cos\alpha''}$; portant dans les autres, on a

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} \frac{c'q \cos\beta'}{\cos\alpha'} = \rho \cos\beta - c'p & \frac{c''q \cos\beta''}{\cos\alpha''} = \rho \cos\beta - c''p \\ \frac{c'q \cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \rho \cos\gamma + \lambda c' & \frac{c''q \cos\gamma''}{\cos\alpha''} = \rho \cos\gamma + \lambda c'' \end{array}\right.$$

Du 2e groupe des équations (3) on tire

$$p = \frac{\rho \cos\beta}{c''} - \frac{q \cos\beta''}{\cos\alpha''}, \quad \lambda = \frac{q \cos\gamma''}{\cos\alpha''} - \frac{\rho \cos\gamma}{c''}.$$

Portant dans le 1er groupe,

$$(4)\left\{\begin{array}{l} \frac{c'q \cos\beta'}{\cos\alpha'} = \rho \cos\beta - \frac{c'\rho \cos\beta}{c''} + \frac{c'q \cos\beta''}{\cos\alpha''} \\ \frac{c'q \cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \rho \cos\gamma + \frac{c'q \cos\gamma''}{\cos\alpha''} - \frac{c'\rho \cos\gamma}{c''} \end{array}\right.$$

Retranchons membre à membre après avoir multiplié la première équation par $\cos\gamma$, et la seconde par $\cos\beta$; il vient, après réduction :

$$\cos\alpha''(\cos\gamma \cos\beta' - \cos\beta \cos\gamma') + \cos\alpha'(\cos\beta \cos\gamma'' - \cos\gamma \cos\beta'') = o ;$$

ou encore ($\cos\alpha$ étant nul) :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{vmatrix} = o$$

Digitized by Google

Cette relation exprime que les trois tangentes doivent être parallèles à un même plan ; quand elle est satisfaite, les deux équations (4) se réduisent à une seule. De la première, par exemple, on peut tirer ρ en fonction de q ; on a ainsi

$$\frac{\rho \cos \beta}{c''} = \frac{c'q(\cos \beta' \cos \alpha'' - \cos \alpha' \cos \beta'')}{(c'' - c') \cos \alpha' \cos \alpha''}$$

de même, de la 2e.

$$\frac{\rho \cos \gamma}{c''} = \frac{c'q(\cos \alpha' \cos \gamma'' - \cos \alpha'' \cos \gamma')}{(c' - c'') \cos \alpha' \cos \alpha''}.$$

Portons ces valeurs dans les expressions de p et de λ.

$$p = \frac{c'q(\cos \beta' \cos \alpha'' - \cos \alpha' \cos \beta'')}{(c'' - c') \cos \alpha' \cos \alpha''} - \frac{q \cos \beta''}{\cos \alpha''} = q \frac{c' \cos \beta' \cos \alpha'' - c'' \cos \beta'' \cos \alpha'}{(c'' - c') \cos \alpha' \cos \alpha''}$$

$$\lambda = \frac{q \cos \gamma''}{\cos \alpha''} - \frac{c'q(\cos \alpha' \cos \gamma'' - \cos \alpha'' \cos \gamma')}{(c' - c'') \cos \alpha' \cos \alpha''} = q \frac{c' \cos \gamma' \cos \alpha'' - c'' \cos \alpha' \cos \gamma''}{(c' - c'') \cos \alpha' \cos \alpha''}$$

On a ainsi λ, p, puis v' et w' en fonction de q ; r reste indéterminé.

Les coordonnées x, y, z du centre instantané satisfont aux équations

$$(5) \begin{cases} \lambda x - ry + qz = o \\ rx + \lambda y - pz + v' = o \\ -qx + py + \lambda z + w' = o \end{cases}$$

Dans la dernière équation le facteur q disparaît, et on a ainsi un plan bien déterminé qui contient le centre instantané. Cette équation développée s'écrit :

$$x \cos \alpha' \cos \alpha''(c'' - c') + (c'' \cos \alpha' \cos \beta'' - c' \cos \beta' \cos \alpha'')y + (c' \cos \gamma' \cos \alpha'' - c'' \cos \alpha' \cos \gamma'')z \quad (6)$$
$$+ c'c''(\cos \alpha' \cos \gamma'' - \cos \alpha'' \cos \gamma') = o$$

Si on ajoute les équations (5) après les avoir respectivement multipliées par x, y, z, on obtient

$$(7) \quad \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + v'y + w'z = o$$

L'ensemble des équations (6) et (7) représente un cercle, lieu du centre instantané. Ce cercle rencontre l'axe des z, car si l'on fait $x = y = o$ dans les équations (6) et (7), on trouve $z = -\frac{w'}{\lambda}$.

L'équation du plan double s'écrit

$$pX + qY + rZ = px + qy + rz ;$$

mais en vertu des équations (5), on a

$$px + qy + rz = -\frac{q}{\lambda} v' - \frac{r}{\lambda} w' ;$$

l'équation du plan est donc

Digitized by Google

$$\lambda(pX + qY + rZ) + qv' + rw' = o.$$

Elle contient le seul paramètre variable $\frac{r}{q}$ au premier degré ; le plan passe donc par une droite fixe.

5. — Revenons au cas général du § 1, où les trois plans normaux aux trajectoires se coupent en un point unique à distance finie. On est conduit à résoudre le système (IV) de trois équations linéaires. Admettons maintenant que le déterminant des inconnues $\frac{u'}{\lambda}, \frac{v'}{\lambda}, \frac{w'}{\lambda}$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit nul.

Le point de rencontre des trois plans normaux est alors dans le plan même des trois points donnés. Tout en gardant la même origine, prenons le plan des trois points pour plan des xy ; on a alors $c = c' = c'' = o$.

Le système devient

$$o = au' + bv' + \lambda(a^2 + b^2)$$
$$o = a'u' + b'v' + \lambda(a'^2 + b'^2)$$
$$o = a''u' + b''v' + \lambda(a''^2 + b''^2)$$

Pour que ces trois équations homogènes soient satisfaites pour des valeurs des inconnues qui ne soient pas toutes nulles, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & b & a^2 + b^2 \\ a' & b' & a'^2 + b'^2 \\ a'' & b'' & a''^2 + b''^2 \end{vmatrix} = o$$

Cette relation exprime que les trois points donnés sont sur un cercle passant par l'origine Si cette relation n'est pas satisfaite, on a $u' = v' = \lambda = o$. L'égalité $\lambda = o$ montre que le système est alors invariable, et les relations $u' = v = o$ montrent en outre que l'origine est foyer ; ce qui s'accorde bien avec les résultats connus relativement aux systèmes invariables.

Si le déterminant est nul, et si les mineurs $ab' - ba'$, $ab'' - ba''$, $a'b'' - b'a''$ ne sont pas tous nuls à la fois, (ce qui veut dire que les trois points ne sont pas en ligne droite avec l'origine), les équations donnent une valeur finie et bien déterminée pour $\frac{u'}{\lambda}$ et $\frac{v'}{\lambda}$.

Il est intéressant de chercher le foyer du plan des xy ; pour cela, introduisons la condition $\cos\alpha = \cos\beta = o$ dans les deux premières équations du

Digitized by Google

groupe (I). On a ainsi

$$o = u' - ry + \lambda x$$
$$o = v' + rx + \lambda y$$

d'où $x^2 + y^2 + \frac{u'}{\lambda} x + \frac{v'}{\lambda} y = o.$

Le foyer est sur le cercle qui passe par les trois points et l'origine ; nous verrons qu'il peut se trouver à un point quelconque de ce cercle.

Prenons maintenant, dans le plan des xy, pour axe des x le diamètre du cercle, qui passe par l'origine, et pour axe des y la tangente à ce cercle à l'origine. On a alors $v' = o$, et

$$u' = -\frac{\lambda(a^2 + b^2)}{a} = -\frac{\lambda(a'^2 + b'^2)}{a'} = -\frac{\lambda(a''^2 + b''^2)}{a''}$$

Remarquons que les équations des groupes (I), (II) et (III) peuvent actuellement s'écrire

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \rho\cos\alpha = u' - br + \lambda a \\ \rho\cos\beta = ar + \lambda b \\ \rho\cos\gamma = w' + bp - aq \end{cases} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} \rho'\cos\alpha' = u' - b'r + \gamma a' \\ \rho'\cos\beta' = a'r + \lambda b' \\ \rho'\cos\gamma' = w' + b'p - a'q \end{cases} \quad (\mathrm{III})\begin{cases} \rho''\cos\alpha'' = u'' - b''r + \lambda a'' \\ \rho''\cos\beta'' = a''r + \lambda b'' \\ \rho''\cos\gamma'' = w' + b''p - a''q \end{cases}$$

Si nous substituons à u' sa valeur $-\frac{\lambda(a^2 + b^2)}{a}$ dans le 1er groupe, on a

$$\rho\cos\alpha = -\frac{\lambda(a^2 + b^2)}{a} + \frac{\lambda a^2}{a} - br = -\frac{b}{a}(\lambda b + ar) ;$$

comme d'ailleurs on a

$$a\cos\alpha + b\cos\beta = o, \quad \text{ou} \quad -\frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

il vient $\rho\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(\lambda b + ar)$, ou $\rho\cos\beta = \lambda b + ar$,

ce qui n'est autre chose que la 2me équation du groupe. Ainsi, dans chaque groupe, la première équation se ramène à la seconde ; et il ne reste effectivement que six équations distinctes.

Formons un groupe avec les secondes équations

$$\begin{cases} \rho\cos\beta = ar + \lambda b \\ \rho'\cos\beta' = a'r + \lambda b' \\ \rho''\cos\beta'' = a''r + \lambda b'' \end{cases}$$

Elles donnent ρ, ρ', ρ'' si on connaît r et λ, ou encore elles donnent $\frac{\rho}{\lambda}, \frac{\rho'}{\lambda}, \frac{\rho''}{\lambda}$, si on connaît $\frac{r}{\lambda}$.

Digitized by Google

Les trois dernières forment le groupe

$$\begin{cases} \rho \cos \gamma = w' + bp - aq \\ \rho' \cos \gamma' = w' + bp - a'q \\ \rho'' \cos \gamma'' = w' + b''p - a''q \end{cases}$$

ρ, ρ', ρ'' étant connus, ce groupe donne w', p et q.

Le déterminant des inconnues est

$$\begin{vmatrix} 1 & b & -a \\ 1 & b' & -a' \\ 1 & b'' & -a'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a' & b' \\ 1 & a'' & b'' \end{vmatrix} = 2S,$$

en désignant par S la surface du triangle formé par les trois points donnés. On trouve alors, pour les inconnues w', p et q les valeurs suivantes

$$w' = \frac{r \begin{vmatrix} \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} a & a & b \\ \frac{\cos\gamma}{\cos\beta''} a' & a' & b' \\ \frac{\cos\gamma''}{\cos\beta''} a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} b & a & b \\ \frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'} & a' & b' \\ \frac{\cos\gamma''}{\cos\beta''} b'' & a'' & b'' \end{vmatrix}}{2S}$$

$$p = \frac{r \begin{vmatrix} 1 & a & a\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \\ 1 & a' & a'\frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'} \\ 1 & a'' & a''\frac{\cos\gamma''}{\cos\beta''} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & a & b\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \\ 1 & a' & b'\frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'} \\ 1 & a'' & b''\frac{\cos\gamma''}{\cos\beta''} \end{vmatrix}}{2S}$$

$$q = \frac{r \begin{vmatrix} 1 & b & a\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \\ 1 & b' & a'\frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'} \\ 1 & b'' & a''\frac{\cos\gamma''}{\cos\beta''} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & b & b\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \\ 1 & b' & b'\frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'} \\ 1 & b'' & a''\frac{\cos\gamma''}{\cos\beta''} \end{vmatrix}}{2S}$$

On voit ainsi que w', p et q sont des fonctions homogènes et linéaires de r et de λ ; le déplacement n'est donc pas déterminé, il dépend de $\frac{r}{\lambda}$.

Ecrivons w', p et q sous la forme $w' = W_1\lambda + W_2 r$; $p = P_1\lambda + P_2 r$; $q = Q_1\lambda + Q_2 r$; et soit (x, y, z) le centre instantané.

Digitized by Google

On a
$$o = u' + qz - ry + \lambda x$$
$$o = rx - pz + \lambda y$$
$$o = w' + py - qx + \lambda z$$

Posons, pour abréger, $\frac{r}{\lambda} = t$; ces équations deviennent

$$\begin{cases} x + Q_1 z - \frac{a^2 + b^2}{a} + t(Q_2 z - y) = o \\ y - P_1 z + t(x - P_2 z) = o \\ P_1 y - Q_1 x + z + W_1 + t(P_2 y - Q_2 x + W_2) = o \end{cases}$$

En éliminant t, nous avons le lieu du centre instantané ; c'est la cubique ;

$$\frac{x + Q_1 z - \frac{a^2 + b^2}{a}}{Q_2 z - y} = \frac{y - P_1 z}{x - P_2 z} = \frac{P_1 y + Q_1 x + z + W_1}{P_2 y - Q_2 x + W_2}$$

Le plan double a pour équation

$$p(X - x) + q(Y - y) + r(Z - z) = o$$

ou
$$pX + qY + rZ = px + qy + rz$$

Or on trouve aisément

$$px + qy + rz = -\frac{u'}{\lambda} p - \frac{w'}{\lambda} = r \frac{a^2 + b^2}{a} p - w' \frac{r}{\lambda}$$

d'où
$$(P_1 + P_2 t)X + (Q_1 + Q_2 t)Y + tZ = \frac{a_2 + b^2}{a}(P_1 + P_2 t) - t(W_1 + W_2 t).$$

Ordonnant par rapport à t

$$W_2 t^2 + \left[P_2 X + Q_2 Y + Z - P_2 \frac{a^2 + b^2}{a} + W_1\right] t + P_1 X + Q_1 Y - P_1 \frac{a^2 + b^2}{a} = o$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation

$$\left[P_2 X + Q_2 Y + Z - P_2 \frac{a^2 + b^2}{a} + W_1\right]^2 - 4 W_2 \left(P_1 X + Q_2 Y - P_1 \frac{a^2 + b^2}{a}\right) = o.$$

C'est un cylindre parabolique qui a ses plans diamétraux parallèles au plan $P^2 X + Q^2 Y + Z = o$.

Nous avons vu que le foyer du plan des trois points donnés est sur le cercle qui passe par ces trois points. Comme il est donné par les équations

$$o = u' - ry + \lambda x \quad \text{ou} \quad o = -\frac{a^2 + b^2}{a} - ty + x$$
$$o = rx + \lambda y \qquad\qquad o = tx + y$$

Digitized by Google

on voit que x et y s'expriment en fonction du paramètre variable t par les formules

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a(1+t^2)}, \quad y = -\frac{a^2+b^2}{a(1+t^2)}t;$$

et le foyer peut occuper toutes les positions possibles sur le cercle $a(x^2+y^2) - (a^2+b^2)x = o$.

La caractéristique du même plan s'obtient en écrivant que la composante normale de la vitesse du point (x, y, o) est nulle :

$$o = w' + py - qx, \quad \text{ou} \quad o = W_1 + W_2 t + (P_1 + P_2 t)y - (Q_1 + Q_2 t)x = o.$$

Elle passe par un point fixe qui est à l'intersection des droites

$$P_1 y - Q_1 x + W_1 = o, \quad P_2 y - Q_2 x + W_2 = o.$$

Nous verrons dans la suite que cette propriété s'applique aux caractéristiques de tous les plans du système.

Même problème dans lequel, au lieu de trois trajectoires, on donne six surfaces sur lesquelles sont assujettis à rester six points du Système.

Soient (a_i, b_i, c_i) l'un quelconque des six points $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ les angles formés avec les axes de coordonnées par la normale à la surface correspondante ; X_i, V_i, Z_i les composantes de sa vitesse. On a :

$$\begin{aligned} X_i &= u' + c_i q - b_i r + \lambda a_i \\ Y_i &= v' + a_i r - c_i p + \lambda b_i \qquad (i = 1, 2 \ldots 6) \\ Z_i &= w' + b_i p - a_i q + \lambda c_i \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations après les avoir respectivement multipliés par $\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i$; comme l'on a $X_i \cos\alpha_i + Y_i \cos\beta_i + Z_i \cos\gamma_i = o$, on obtient le système :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} o = u'\cos\alpha_1 + v'\cos\beta_1 + w'\cos\gamma_1 + p(b_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\beta_1) + q(c_1\cos\alpha_1 - a_1\cos\gamma_1) + r(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda(a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1) \\ o = u'\cos\alpha_2 + \ldots\ldots + p(b_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\beta_2) + \ldots\ldots + \lambda(a_2\cos\alpha_2 + b_2\cos\beta_2 + c_2\cos\gamma_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ o = u'\cos\alpha_6 + b'\cos\beta_6 + w'\cos\gamma_6 + p(b_6\cos\gamma_6 - c_6\cos\beta_6) + q(c_6\cos\alpha_6 - a_6\cos\gamma_6) + r(a_6\cos\beta_6 - b_6\cos\alpha_6) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda(a_6\cos\alpha_6 + b_6\cos\beta_6 + c_6\cos\gamma_6) \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi un système de six équations homogènes entre les sept

Digitized by Google

inconnues u', v', w', p, q, r, λ, qui déterminent les rapports de six d'entre elles à la septième, λ par exemple, quand le déterminant de ces six inconnues n'est pas nul. Le problème est alors déterminé, et le déplacement bien défini.

Supposons maintenant que ce déterminant soit nul. On a

$$o = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & b_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\beta_1 & c_1\cos\alpha_1 - a_1\cos\gamma_1 & a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & b_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\beta_2 & c_2\cos\alpha_2 - a_2\cos\gamma_2 & a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_6 & \cos\beta_6 & \cos\gamma_6 & b_6\cos\gamma_6 - c_6\cos\beta_6 & c_6\cos\alpha_6 - a_6\cos\gamma_6 & a_6\cos\beta_6 - b_6\cos\alpha_6 \end{vmatrix}$$

Il existe une relation linéaire et homogène entre les éléments d'une même ligne ; on a donc

$$\begin{aligned} &A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 + L(b_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\beta_1) + M(c_1\cos\alpha_1 - a_1\cos\gamma_1) + N(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1) = o \\ &A\cos\alpha_2 + B\cos\beta_2 + C\cos\gamma_2 + L(b_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\beta_2) + M(c_2\cos\alpha_2 - a_2\cos\gamma_2) + N(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) = o \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A\cos\alpha_6 + B\cos\beta_6 + C\cos\gamma_6 + L(b_6\cos\gamma_6 - c_6\cos\beta_6) + M(c_6\cos\alpha_6 - a_6\cos\gamma_6) + N(a_6\cos\beta_6 - b_6\cos\alpha_6) = o. \end{aligned}$$

Ces relations montrent que dans ce cas les six normales appartiennent à un même complexe linéaire.

Prenons alors pour axe des z l'axe de ce complexe ; on sait que l'équation du complexe devient alors $b\cos\alpha - a\cos\beta = k\cos\gamma$; quant au système d'équations linéaires, il s'écrit maintenant

$$(2)\left\{\begin{aligned} &u'\cos\alpha_1 + v'\cos\beta_1 + (w'-kr)\cos\gamma_1 + p(b_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\beta_1) + q(c_1\cos\alpha_1 - a_1\cos\gamma_1) + \lambda(a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1) = o \\ &u'\cos\alpha_2 + v'\cos\beta_2 + (w'-kr)\cos\gamma_2 + p(b_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\beta_2) + q(c_2\cos\alpha_2 - a_2\cos\gamma_2) + \lambda(a_2\cos\alpha_2 + b_2\cos\beta_2 + c_2\cos\gamma_2) = o \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &u'\cos\alpha_6 + v'\cos\beta_6 + (w'-kr)\cos\gamma_6 + p(b_6\cos\gamma_6 - c_6\cos\beta_6) + q(c_6\cos\alpha_6 - a_6\cos\gamma_6) + \lambda(a_6\cos\alpha_6 + b_6\cos\beta_6 + c_6\cos\gamma_6) = o \end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi six équations homogènes à six inconnues, u', v', $w'-kr$, p, q, λ. Si le déterminant de ces inconnues n'est pas nul, ces équations ne sont satisfaites que pour les valeurs $u' = v' = p = q = \lambda = o$; $w' = kr$. C'est le mouvement d'un système invariable, qui a pour axe instantané glissant l'axe des z, le rapport de la translation suivant l'axe à la rotation autour de celui-ci étant k.

Supposons maintenant que le déterminant soit nul.

$$(3)\ o = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & b_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\beta_1 & c_1\cos\alpha_1 - a_1\cos\gamma_1 & a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & b_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\beta_2 & c_2\cos\alpha_2 - a_2\cos\gamma_2 & a_2\cos\alpha_2 + b_2\cos\beta_2 + c_2\cos\gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_6 & \cos\beta_6 & \cos\gamma_6 & b_6\cos\gamma_6 - c_6\cos\beta_6 & c_6\cos\alpha_6 - a_6\cos\gamma_6 & a_6\cos\alpha_6 + b_6\cos\beta_6 + c_6\cos\gamma_6 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Si tous les mineurs du 1er ordre ne sont pas nuls, les équations (2) donnent une valeur unique et bien déterminée pour $\frac{u'}{\lambda}, \frac{v'}{\lambda}, \frac{w'-kr}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}$ et $\frac{q}{\lambda}$. Désignons par n la valeur trouvée peur $\frac{w'-kr}{\lambda}$; on a $\frac{w'}{\lambda} = n + \frac{kr}{\lambda}$.

On voit qu'il y a alors une infinité de déplacements élémentaires répondant aux conditions du problème, puisqu'on ne trouve pas une valeur bien déterminée pour $\frac{w'}{\lambda}$ et $\frac{r}{\lambda}$, mais une relation entre ces deux éléments.

L'origine est un point quelconque de l'axe du complexe, et comme $\frac{u'}{\lambda}$ et $\frac{v'}{\lambda}$ sont bien déterminés, on voit que, pour tous les déplacements, la composante de la vitesse d'un point de cet axe, perpendiculaire à cet axe, est invariable, de sorte que la vitesse de ce point, pour tous ces déplacements, est contenue dans un plan fixe passant par l'axe. De même, $\frac{p}{\lambda}$ et $\frac{q}{\lambda}$ étant bien déterminés, on voit que l'axe instantané est parallèle à un plan fixe passant par l'axe du complexe.

Puisque en chaque point de cet axe la vitesse est contenue dans un plan fixe, le plan tangent en chaque point de la surface réglée engendrée par cette droite, pour chaque déplacement, est invariable, et par suite, pour tous ces déplacements, cette droite engendre le même élément de surface.

2. — Soit $\sigma = \frac{r}{\lambda}$ le paramètre qui caractérise chacun de ces déplacements; cherchons le lieu du centre instantané, pour toutes les valeurs de σ.

Pour cela, écrivons que la vitesse du point (x, y, z) est nulle.

$$\begin{aligned} u' + qz - ry + \lambda x &= o \\ v' + rx - pz + \lambda y &= o \\ w' + py - qx + \lambda z &= o \end{aligned}$$

Posons : $\frac{q}{\lambda} = Q$, $\frac{p}{\lambda} = P$, $-\frac{u'}{\lambda} = U$, $-\frac{v'}{\lambda} = V$.

Les équations deviennent alors :

$$(4) \begin{cases} x - \sigma y + Qz = U \\ \sigma x + y - Pz = V \\ Qx - Py - z = n + k\sigma \end{cases}$$

Le déterminant des inconnues est $-(\sigma^2 + P^2 + Q^2 + 1)$; il n'est jamais nul Résolvant, on trouve

$$x = \frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma^2 + P^2 + Q^2 + 1} \quad y = \frac{\varphi_2(\sigma)}{\sigma^2 + P^2 + Q^2 + 1} \quad z = \frac{\varphi_3(\sigma)}{\sigma^2 + P^2 + Q^2 + 1}$$

Digitized by Google

φ_1 et φ_2 sont des fonctions entières du second degré en σ, φ_3 est du troisième degré ; le lieu du point (x, y, z) est donc une cubique gauche.

Comme le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur réelle de σ, la cubique n'a qu'un point réel à l'infini ; il correspond à une valeur infinie du paramètre σ. Pour cette valeur, on a $x = -Pk$, $y = -Qk$; ce sont les équations de l'asymptote réelle, qui est parallèle à l'axe des z. La projection sur le plan des xy est alors évidemment une conique ; pour avoir son équation, éliminons z entre les équations (4), en remplaçant dans les deux premières z par $Qx - Py - (n + k\sigma)$; il vient

$$x(1 + Q^2) - PQy - Qn - U = \sigma(y + KQ)$$
$$-PQx + y(1 + P^2) + Pn - V = -\sigma(x + KP)$$

Eliminant σ, $$\frac{x(1 + Q^2) - PQy - Qn - U}{-PQx + y(1 + P^2) + Pn - V} = -\frac{y + kQ}{x + kP}$$

On trouve, après réduction.

$$(5)\quad x^2(1 + Q^2) - 2PQxy + y^2(1 + P^2) + (kP - Qn - U)x + (kQ + Pn - V)y - k(PU + QV) = o$$

Le discriminant est $-P^2 - Q^2 - 1$; la conique est donc toujours une ellipse. Son équation peut aussi se mettre sous la forme :

$$(5)'\quad x^2 + y^2 + (kP - Qn - U)x + (kQ + Pn - V)y - k(PU + QV) + (Qx - Py)^2 = o$$

L'ellipse est donc bitangente à un cercle, la corde de contact étant $Qx - Py = o$, ou $\frac{y}{x} = \frac{q}{p}$. C'est la parallèle menée par l'origine à la projection de l'axe instantané sur le plan des xy ; donc les axes de l'ellipse sont dirigés parallèlement et perpendiculairement à cette direction. Vérifions aussi que l'ellipse passe par le point $x = -kP$, $y = -kQ$, qui est un des points de contact de l'ellipse et du cercle.

3. — L'équation de l'ellipse doit être indépendante de la position de l'origine sur l'axe du complexe, puisque c'est la section droite d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cet axe. Il est intéressant de vérifier que les coefficients de cette équation ne changent pas quand on remplace c_i par $c_i + h$. $(i = 1, 2, 3 \ldots 6)$ Reprenons les équations (2) avec les nouvelles notations ; nous avons :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}
U\cos\alpha_1 + V\cos\beta_1 - n\cos\gamma_1 + P(c_1\cos\beta_1 - b_1\cos\gamma_1) + Q(a_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\alpha_1) = a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1 \\
U\cos\alpha_2 + V\cos\beta_2 - n\cos\gamma_2 + P(c_2\cos\beta_2 - b_2\cos\gamma_2) + Q(a_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\alpha_2) = a_2\cos\alpha_2 + b_2\cos\beta_2 + c_2\cos\gamma_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
U\cos\alpha_5 + V\cos\beta_5 - n\cos\gamma_5 + P(c_5\cos\beta_5 - b_5\cos\gamma_5) + Q(a_5\cos\gamma_5 - c_5\cos\alpha_5) = a_5\cos\alpha_5 + b_5\cos\beta_5 + c_5\cos\gamma_5
\end{array}\right.$$

Digitized by Google

Nous avons admis que, le déterminant (3) étant nul, le mineur D composé des coefficients des cinq équations qui précèdent est différent de zéro. Les équations (6) donnent alors, pour les inconnues U, V, n, P, Q des valeurs finies et bien déterminées. Le mineur D a pour expression

$$D = -\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & c_1\cos\beta_1 - b_1\cos\gamma_1 & a_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & c_2\cos\beta_2 - b_2\cos\gamma_2 & a_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_5 & \cos\beta_5 & \cos\gamma_5 & c_5\cos\beta_5 - b_5\cos\gamma_5 & a_5\cos\gamma_5 - c_5\cos\alpha_5 \end{vmatrix}$$

Il est évident que D ne change pas quand on y remplace c_i par $c_i + h$.

Le numérateur de l'expression de U est le déterminant

$$-\begin{vmatrix} a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & c_1\cos\beta_1 - b_1\cos\gamma_1 & a_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\alpha_1 \\ a_2\cos\alpha_2 + b_2\cos\beta_2 + c_2\cos\gamma_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & c_2\cos\beta_2 - b_2\cos\gamma_2 & a_2\cos\gamma_2 - c_2\cos\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_5\cos\alpha_5 + b_5\cos\beta_5 + c_5\cos\gamma_5 & \cos\beta_5 & \cos\gamma_5 & c_5\cos\beta_5 - b_5\cos\gamma_5 & a_5\cos\gamma_5 - c_5\cos\alpha_5 \end{vmatrix}$$

Si l'on y remplace c_i par $c_i + h$, la première et la quatrième colonne n'introduisent aucun changement, mais, dans la cinquième colonne, le terme $a_i \cos\gamma_i - c_i \cos\alpha_i$ s'augmentant de $-h\cos\alpha_i$, le déterminant s'augmente de

$$h\begin{vmatrix} a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & c_1\cos\beta_1 - b_1\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1 \\ a_2\cos\alpha_2 + b_2\cos\beta_2 + c_2\cos\gamma_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & c_2\cos\beta_2 - b_2\cos\gamma_2 & \cos\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_5\cos\alpha_5 + b_5\cos\beta_5 + c_5\cos\gamma_5 & \cos\beta_5 & \cos\gamma_5 & c_5\cos\beta_5 - b_5\cos\gamma_5 & \cos\alpha_5 \end{vmatrix}$$

Or, il est facile de voir que le déterminant qui multiplie h n'est autre que le numérateur de Q ; donc, quand on remplace c_i par $c_i + h$ U augmente de hQ.

On verrait par un calcul tout à fait analogue que, dans les mêmes conditions, V augmente de $-h$P. On voit de même que n augmente de $-h$, et que P et Q restent invariables.

Ceci posé, pour montrer que les coefficients de l'équation (5) sont invariables, il suffit de vérifier que les expressions $Qn + U$, $Pn - V$, $PU + QV$ sont indépendantes de h. Or ces variations sont respectivement $-Qh + Qh$, $-Ph + Ph$, $PQh - PQh$.

4. — Nous venons de voir que, quand on déplace l'origine de la longueur h, U et V deviennent respectivement $U + hQ$ et $V - hP$. Comme ce sont des

Digitized by Google

grandeurs proportionnelles aux composantes, perpendiculaires à l'axe des vitesses des divers points de cet axe, on voit comment varie le plan tangent à la surface réglée que l'axe engendre. La tangente de l'angle formé par ce plan tangent avec le plan des zx est égale au rapport $\frac{V - hP}{U + hQ}$. A l'infini ce rapport devient $-\frac{P}{Q}$; c'est-à-dire que le plan tangent à l'infini est perpendiculaire au plan mené par l'axe des z, parallèlement à tous les axes instantanés relatifs à toutes les valeurs du paramètre σ. Donc ce dernier plan est le plan central de la surface, sur cette génératrice.

Supposons l'origine placée au point central ; d'après ce qui précède, on a $\frac{V}{U} = \frac{Q}{P}$. Si nous prenons en même temps le plan central pour plan des zx, nous avons $Q = V = O$. Le plan tangent à la surface réglée en un point situé sur l'axe à une distance h de l'origine, fait avec le plan central un angle dont la tangente est $-\frac{hP}{U}$; le paramètre de distribution s'obtient en divisant h par cette expression ; il est donc égal à $-\frac{U}{P}$, ou, en se reportant à la définition de U et de P, à $\frac{u'}{p}$.

Avec ce choix des axes, l'équation de l'ellipse devient

$$x^2 + y^2 + x(kP - U) + Pny - kPU + P^2y^2 = o$$

Les axes de cette ellipse sont parallèles aux axes de coordonnées ; l'axe des x rencontre la courbe en deux points dont les abscisses sont U et $-kP$; c'est par ce dernier point que passe l'asymptote réelle de la cubique gauche, lieu des centres instantanés.

5. — Le plan double a pour équation $p(X - x) + q(Y - y) + r(Z - z) = o$; x, y, z étant les coordonnées du centre instantané, lesquelles satisfont aux équations

$$o = u' + qz - ry + \lambda x$$
$$o = v' + rx - pz + \lambda y$$
$$o = w' + py - qx + \lambda z$$

D'où on tire

$$o = pu' + qv' + rw' + \lambda(px + qy + rz)$$

L'équation du plan double est donc

$$pX + qY + rZ = -p\frac{u'}{\lambda} - q\frac{v'}{\lambda} - r\frac{w'}{\lambda},$$

ou encore

$$PX + QY + \sigma Z = PU + QV - \sigma(n + k\sigma).$$

Digitized by Google

Ordonnant par rapport à σ :

$$k\sigma^2 + (Z + n)\sigma + P(X - U) + Q(Y - V) = o$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation

$$(Z+n)^2 - 4k[P(X - U) + Q(Y - V)] = o$$

C'est un cylindre parabolique.

En adoptant les axes du § 4, l'équation devient $(Z + n)^2 = 4\,k\,P\,(X - U)$.

Le plan double enveloppe donc un cylindre parabolique dont les génératrices sont perpendiculaires au plan central, dont le plan principal est perpendiculaire à l'axe du complexe, et dont le sommet de la section droite a, dans le plan central, pour coordonnées $X = U, Z = -n$.

Proposons-nous maintenant de trouver le lieu de l'axe instantané pour toutes les valeurs du paramètre σ. Les équations de cet axe sont

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{r}$$

Avec les axes choisis on a $q = V = o$, et les équations de l'axe sont

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Z - z}{\sigma}, \; Y = y.$$

D'ailleurs x, y, z satisfont au système

$$x - \sigma y = U.$$
$$\sigma x + y - Pz = o$$
$$-Py - z = n + k\sigma.$$

On tire de là $x = \sigma y + U$ $z = -Py - n - k\sigma$; portant dans la seconde équation, il vient $y\,(P^2 + \sigma^2 + 1) = -\sigma\,(Pk + U) - Pn$ d'où

$$y = -\frac{(Pk + U)\sigma + Pn}{P^2 + \sigma^2 + 1}$$

On a donc d'abord $Y = -\dfrac{(Pk + U)\sigma + Pn}{P^2 + \sigma^2 + 1}$; puis $\sigma X = PZ + \sigma x - Pz$; et, en vertu de $\sigma x + y - Pz = o$, $\sigma X = PZ - y$, ou $\sigma X = PZ - Y$; d'où $\sigma = \dfrac{PZ - Y}{X}$.

Portant cette valeur de σ dans l'expression de Y, il vient

$$Y = -\frac{(Pk + U)\dfrac{PZ - Y}{X} + Pn}{P^2 + 1 + \dfrac{(PZ - Y)^2}{X^2}}$$

ou $\quad Y[(P^2 + 1)X^2 + (PZ - Y)^2] + (Pk + U)(PZ - Y)X + PnX^2 = o;$

équation d'une surface règlée du troisième ordre. C'est aussi un conoïde, car il est facile de vérifier que la droite $\begin{matrix} X = o \\ Y = PZ \end{matrix}$ rencontre toutes les génératrices. En effet si l'on fait $X = o$ dans les équations de la génératrice, on a $PZ = Pz - \sigma x$ $Y = y$, et comme $Pz - \sigma x = y$, le résultat est vérifié.

Digitized by Google

IIe PARTIE

1. — Déplacement à deux paramètres.

Quand il s'est agi, dans le problème précédent, de déterminer les éléments du déplacement, connaissant les surfaces directrices de six points du système, nous avons vu que le problème est déterminé quand les six normales n'appartiennent pas à un même complexe linéaire. Si elles appartiennent à un même complexe linéaire, il a été démontré que le seul mouvement possible, en général, est celui du système invariable guidé par cinq de ces surfaces. Mais il y a une infinité de mouvements possibles, si l'on a aussi

$$o = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & b_1\cos\gamma_1 - c_1\cos\beta_1 & c_1\cos\alpha_1 - a_1\cos\gamma_1 & a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_6 & \cos\beta_6 & \cos\gamma_6 & b_6\cos\gamma_6 - c_6\cos\beta_6 & c_6\cos\alpha_6 - a_6\cos\gamma_6 & a_6\cos\alpha_6 + b_6\cos\beta_6 + c_6\cos\gamma_6 \end{vmatrix}$$

Dans ce cas, chaque point du système décrit une surface, et le déplacement peut être défini par les surfaces S_2, S_3 et... S_6 décrites par les cinq points (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3).... (a_6, b_6, c_6). C'est, comme nous allons le voir, un déplacement à deux paramètres, dans lequel chaque point du système a, en général, une surface trajectoire.

La normale à la surface décrite par un point (a_1, b_1, c_1) est déterminée par l'équation précédente, et par l'équation du complexe formé par les cinq autres normales, et dont elle-même fait partie.

Nous avons vu que, dans ce cas, si on prend pour origine O, le point central de la surface engendrée par l'axe du complexe, pour plan des zx, le plan tangent à cette surface en ce point, et pour plan des xy le plan normal à l'axe Oz, la composante q de la rotation suivant Oy est toujours nulle, le rapport $\frac{p}{\lambda}$ est constant, la composante suivant Oy de la vitesse de l'origine est nulle, le rapport $\frac{u'}{\lambda}$ est, de même que $\frac{p}{\lambda}$, constant pour tous les déplacements, et enfin que la composante w' de la vitesse de l'origine est liée à la rotation r par la relation $\frac{w'}{\lambda} - k\frac{r}{\lambda} = \text{constante} = n$.

Digitized by Google

Introduction des deux paramètres. — Eléments du premier ordre dans le déplacement d'un point.

1. — Soient a, b, c les coordonnées d'un point du système à l'origine du temps ; δx, δy, δz les variations de ces coordonnées à l'époque infiniment voisine t ; on aura, en ne tenant compte que du premier ordre, et en désignant $n\lambda$ par la lettre w_1 :

$$\delta x = (u' - br + \lambda a)\, t = (u' + \lambda a)\, t - brt$$
$$\delta y = (-pc + ar + \lambda b)\, t = (-pc + \lambda b)\, t + art$$
$$\delta z = (w' + pb + \lambda c)\, t = (w_1 + pb + \lambda c)\, t + krt$$

On voit ainsi que le déplacement du point (a, b, c) se compose de deux déplacements ; le premier qui a pour composantes $(u' + \lambda a)\, t$, $(-pc + \lambda b)\, t$, $(w_1 + pb + \lambda c)\, t$; l'autre qui a pour composantes $-brt$, art, krt.

Le premier est une rotation autour de ox, suivie d'une homothétie de centre O, et d'une translation (u', o, w_1) ; le second est une rotation autour de oz, suivie d'une translation suivant cet axe. Comme d'ailleurs u', w, p, λ sont proportionnels, on peut supposer que le coefficient de proportionalité est dans le paramètre t, et supposer ces éléments constants. Comme aussi r est arbitraire, on peut prendre r constant, sauf à donner au facteur t le caractère d'indépendance de r, et le désigner par la lettre s. On aura donc, à partir de la position initiale, tous les déplacements possibles, par les relations

$$\delta x = (u' + \lambda a)\, t - br.\, s$$
$$\delta y = (-pc + \lambda b)\, t + ar.\, s$$
$$\delta z = (w_1 + pb + \lambda c)\, t + kr.\, s$$

On voit donc que le déplacement du point (a, b, c) est une fonction des deux paramètres indépendants t et s. Remarquons que si $t = o$, le déplacement $\delta x = -br.s$, $\delta y = ar.\, s$, $\delta z = krs$, laisse le système invariable comme forme, et comme grandeur.

2. — Déplacement d'un plan.

Soient α, β, γ les projections d'un segment OA qui, à l'origine du temps est, par exemple, égal à 1. On obtiendra ses projections à l'époque t, en retranchant des nouvelles coordonnées du point A celles du point qui, à l'époque $t = o$, se

Digitized by Google

trouvait à l'origine des coordonnées, O. On obtient ainsi, en se limitant toujours au premier ordre.

$$\alpha_1 = \alpha + \lambda\alpha t - r\beta s$$
$$\beta_1 = \beta + (\lambda\beta - p\gamma)t + r\alpha s$$
$$\gamma_1 = \gamma + (p\beta + \lambda\gamma)t$$

Soit maintenant un plan déterminé par un de ses points (a, b, c) et les cosinus directeurs α, β, γ de sa normale. Son équation est $\alpha x + \beta y + \gamma z - (a\alpha + b\beta + c\gamma) = o$; et on peut prendre pour ses coordonnées homogènes α, β, γ et $\delta = a\alpha + b\beta + c\gamma$. Il s'agit de trouver l'expression δ_1 de δ, à l'époque t. On a $\delta_1 = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1$, et en remplaçant a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 par les valeurs déjà trouvées, on obtient $\delta_1 = \delta + (u'\alpha + w_1\gamma + 2\lambda\delta)\, t + kr\gamma s$.

3. — Déplacement d'une droite.

Les coordonnées d'une droite sont ses cosinus directeurs α, β, γ, et les expressions $L = c\beta - b\gamma$, $M = \alpha\gamma - c\alpha$, $N = b\alpha - a\beta$. Nous allons chercher les développements de ces trois dernières coordonnées. Nous pouvons écrire

$$a_1 = a + a'_t.t + a'_s.s \qquad \alpha_1 = \alpha + \alpha'_t.t + \alpha'_s.s$$
$$b_1 = b + b'_t\, t + b'_s.s \qquad \beta_1 = \beta + \beta'_t.t + \beta'_s.s$$
$$c_1 = c + c'_t\, t + c'_s\, s \qquad \gamma_1 = \gamma + \gamma'_t.t + \gamma'_s.s\ ;$$

et nous savons que l'on a

$$a'_t = u' + \lambda a \qquad a'_s = -rb \qquad a'_t = \lambda\alpha \qquad \alpha'_s = -r\beta$$
$$b'_t = \lambda b - pc \qquad b'_s = ra \qquad \beta'_t = \lambda\beta - p\gamma \qquad \beta'_s = r\alpha$$
$$c'_t = w_1 + pb + \lambda c \qquad c'_s = kr \qquad \gamma'_t = p\beta + \lambda\gamma \qquad \gamma'_s = o$$

$$\begin{aligned} L_1 &= (c + c'_t\, t + c'_s\, s)(\beta + \beta'_t\, t + b'_s\, s) - (b + b_t\, t + b'_s\, s)(\gamma + \gamma'_t\, t + \gamma'_s\, s) \\ &= L + (c'_t\, \beta + \beta'_t\, c - b'_t\, \gamma - \gamma'_t\, b)\, t + (c'_s\, \beta + \beta'_s\, c - b'_s\, \gamma - \gamma'_s\, b)\, s \\ &= L + (w_1\, \beta + 2\lambda L)\, t + r(k\beta - M)\, s \end{aligned}$$

De même $M_1 = M + (u'\gamma - w_1\alpha + 2\lambda M - pN)\, t + r(-k\alpha + L)\, s$

$$N_1 = N + (-u'\beta + 2\lambda N + pM)\, t$$

Si l'on écrit ces développements sous la forme

$$L_1 = L + L'_t.t + L'_s.s$$
$$M_1 = M + M'_t\, t + M'_s\, s$$
$$N_1 = N + N'_s\, t + N'_s\, s,$$

Digitized by Google

les relations précédentes montrent que L'_t, L'_s, M'_t, M'_s, N'_t sont des fonctions linéaires des coordonnées α, β, γ, L, M, N ; et on a aussi $N's = o$, ce qui était aisé à prévoir a priori.

Comme l'on doit avoir, pour toute valeur de t et de s, la relation $\alpha_1 L_1 + \beta_1 M_1 + \gamma_1 N_1 = o$, on est conduit aux identités

$$\alpha'_t L + \beta'_t M + \gamma'_t N + \alpha L'_t + \beta M'_t + \gamma N'_t = o$$
$$\alpha'_s L + \beta'_s M + \alpha L'_s + \beta M'_s = o.$$

Plan tangent. — Caractéristique. — Normale.

1. — On obtient l'équation du plan tangent au point (a, b, c) à la surface trajectoire de ce point, en éliminant t et s dans les équations

$$x = a + (u' + \lambda a)\, t - brs$$
$$y = b + (-pc + \lambda b)\, t + ars$$
$$z = c + (w_1 + pb + \lambda c)\, t + krs.$$

On a ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} x - a & u' + \lambda a & -b \\ y - b & -pc + \lambda b & k \\ z - c & w_1 + pb + \lambda c & k \end{vmatrix} = o$$

Si dans cette équation on considère x, y, z comme les coordonnées d'un point fixe donné, et a, b, c comme des coordonnées courantes, on a la surface du troisième ordre, lieu des points pour lesquels les plans tangents passent par le même point (x, y, z). Cette surface contient la cubique Γ, indépendante de x, y et z, qui a pour équations

$$\frac{u' + \lambda a}{-b} = \frac{-pc + \lambda b}{a} = \frac{w_1 + pb + \lambda c}{k}$$

2. — On obtient la caractéristique du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$, en joignant à l'équation de ce plan l'équation suivante

$$(\alpha'_t x + \beta'_t y + \gamma'_t z - \delta'_t)\, t + (\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z - \delta'_s)\, s = o.$$

Comme cette équation dépend d'une façon linéaire, du paramètre $\frac{s}{t}$, le plan qu'elle représente passe par une droite fixe, représentée par l'ensemble des équations

$$\alpha'_t x + \beta'_t y + \gamma'_t z - \delta'_t = o$$
$$\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z - \delta'_s = o.$$

Digitized by Google

Il en résulte que la caractéristique passe par un point fixe, intersection du plan et de cette droite.

Développons les équations de la droite.

$$\lambda\alpha x + (\lambda\beta - p\gamma)\, y + (p\beta + \lambda\gamma)\, z - (u'\alpha + w_1\gamma + 2\lambda\delta) = o$$
$$-\beta x + \alpha y - k\gamma = o$$

La première équation s'écrit :

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta) - p\gamma y + p\beta z - (u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta) = o\ ;$$

on a donc en définitive le système

$$\begin{cases} p\gamma y - p\beta z + u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta = o \\ \beta x - \alpha y + k\gamma = o \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o \end{cases}$$

3. — Remarquons que les deux plans

$$\beta x - \alpha y + k\gamma = o$$
$$p\gamma y - p\beta z + u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta = o$$

sont tous les deux perpendiculaires au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$; leur intersection est donc la normale à la surface enveloppée par le plan donné ; c'est aussi la normale à la surface décrite par le point du système qui coïncide avec l'intersection de cette droite et du plan.

Les équations de la normale s'écrivent

$$x = \frac{\alpha}{\beta} y - \frac{k\gamma}{\beta}\ ;\ z = \frac{\gamma}{\beta} y + \frac{u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta}{p\beta}$$

Identifions avec $X = my + \mu$, $z = ny + \nu$.

On a $\mu = \frac{-k\gamma}{\beta}$ $n = \frac{\gamma}{\beta}$; d'où $\mu = -kn$. Cette relation montre que l'identification n'est possible que si la droite appartient au complexe linéaire des normales dans le déplacement qui laisse le système invariable.

Cette condition étant remplie, l'identification se fait aisément ; et on obtient

$$\alpha = m\beta \quad \gamma = n\beta \quad \delta = \frac{p\nu - u'm - w_1 n}{\lambda}\beta.$$

L'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$ du plan tangent auquel la droite est normale s'écrit alors

$$m\left(x + \frac{u'}{\lambda}\right) + n\left(z + \frac{w_1}{\lambda}\right) + y - \frac{p\nu}{\lambda} = o$$

Digitized by Google

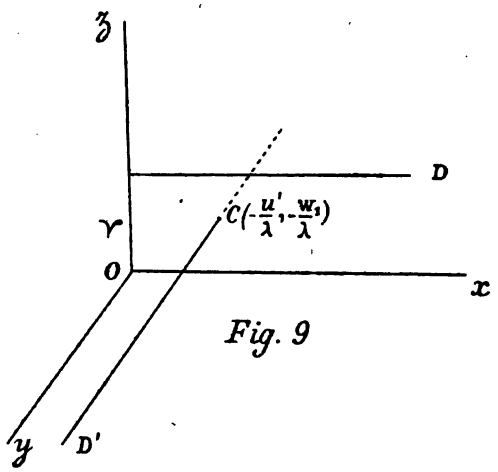


Fig. 9

On voit ainsi que toute droite du complexe est normale à la surface trajectoire d'un de ses points, et qu'ainsi pour une telle droite le foyer reste fixe pour tous les déplacements.

L'équation du plan montre qu'il passe par le point $x = -\frac{u'}{\lambda}, y = \frac{p\nu}{\lambda}, z = -\frac{w_1}{\lambda}$. Une seule de ces coordonnées : $y = \frac{p\nu}{\lambda}$ varie avec la normale, et le point est fixe pour toutes les normales pour lesquelles ν est constant, c'est-à-dire qui rencontrent la droite D parallèle à ox, située dans le plan zox à une distance ν de cette droite.

Cette relation entre le plan tangent et la normale peut être présentée sous la forme suivante.

Considérons la droite D′ parallèle à Oy menée par le point C dont les coordonnées sont $-\frac{u'}{\lambda}, o, -\frac{w'}{\lambda}$; *un plan tangent coupe D′ en un point dont la distance au point C est dans un rapport constant avec la distance au plan yox de la trace de la normale correspondante sur le plan zox.*

Cubique Γ

Nous avons trouvé, pour le plan tangent à la surface décrite par le point (a, b, c) du système, l'équation

$$\begin{vmatrix} x-a & u'+\lambda a & -b \\ y-b & -pc+\lambda b & a \\ z-c & w_1+pb+\lambda c & k \end{vmatrix} = o$$

Cette équation est indéterminée quand le point (a, b, c) appartient à la cubique Γ que nous avons déjà rencontrée et qui a pour équations

$$\frac{u'+\lambda a}{-b} = \frac{-pc+\lambda b}{a} = \frac{w_1+pb+\lambda c}{k}$$

Il est facile de voir que, dans ce cas, le point (a, b, c) décrit, non pas un élément de surface, pour tous les déplacements, mais un élément de ligne, ce

Digitized by Google

qui concorde bien avec l'indétermination du plan tangent. Soit en effet μ la valeur commune des rapports précédents ; on a $a'_t = \mu a'_s$, $b'_t = \mu b'_s$, $c'_t = \mu c'_s$, et, par suite, on a

$$a_1 = a + \mu a'_s t + a'_s . s = a + a'_s (\mu t + s)$$
$$b_1 = b + \mu b'_s t + b'_s . s = b + b'_s (\mu t + s)$$
$$c_1 = c + \mu c'_s t + c'_s . s = c + c'_s (\mu t + s)$$

Donc l'élément décrit par le point a, b, c est, pour toutes les valeurs de s et de t, parallèle au segment qui a pour projections a'_s, b'_s, c'_s.

La cubique Γ se présente donc comme l'analogue des droites D et Δ, dans le déplacement à deux paramètres, d'un système invariable. Mais ces droites D et Δ contiennent aussi les points qui sont immobiles pour certains déplacements du système ; on peut voir qu'il en est de même pour la cubique Γ. Si nous écrivons, en effet, que la vitesse du point a, b, c est nulle, nous avons les équations

$$(u' + \lambda a) t - brs = o$$
$$(-pc + \lambda b) t + ars = o$$
$$(w_1 + pb + \lambda c) t + krs = o$$

Si on élimine de ces équations t et rs, on obtient les équations de la cubique.

En groupant deux à deux les rapports qui entrent dans les équations de la cubique, on obtient trois quadriques qui contiennent cette courbe ; ce sont :

l'hyperboloïde H_1 : $\frac{u' + \lambda a}{-b} = \frac{-pc + \lambda b}{a}$, ou $\lambda (a^2 + b^2) - pbc + u'a = o$;

le paraboloïde P_1 : $\frac{u' + \lambda a}{-b} = \frac{w_1 + pb + \lambda c}{k}$, ou $pb^2 + \lambda bc + \lambda ka + w_1 b + ku' = o$;

le paraboloïde P_2 : $\frac{-pc + \lambda b}{a} = \frac{w_1 + pb + \lambda c}{k}$, ou $pab + \lambda ac + w_1 a - \lambda kb + pkc = o$.

Si on se reporte à l'équation du plan tangent à la surface trajectoire du point a, b, c, on voit que les premiers membres des équations rendues entières de ces trois quadriques sont respectivement les coefficients de x, y, z dans l'équation du plan tangent développée. Il en résulte que l'hyperboloïde H_1 est le lieu des points pour lesquels les plans tangents sont parallèles à Oz ; pour les plans tangents parallèles aux deux autres axes, on a les paraboloïdes P_1 et P_2.

Remarquons d'ailleurs que les normales aux surfaces enveloppées par les plans du système parallèles à oz, rencontrent cet axe. En effet, nous avons trouvé pour les équations de la normale correspondante au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$,

$$\beta x - \alpha y + k\gamma = o ; \quad p\gamma y - p\beta z + u'\alpha + w_1 \gamma + \lambda \delta = o.$$

Si $\gamma = o$, on a $\beta x - \alpha y = o$; et la normale rencontre oz. On voit ainsi que

Digitized by Google

l'hyperboloïde H_1 jouit de cette propriété que *les normales aux surfaces trajectoires de tous ses points rencontrent l'axe Oz, et lui sont perpendiculaires.*

Remarquons que cet hyperboloïde H_1 qui contient l'axe oz et qui est coupé par le plan xOy suivant un cercle est tel qu'il existe une génératrice perpendiculaire à chaque plan de section circulaire. Il peut être engendré, comme les hyperboloïdes H du déplacement à un seul paramètre, par l'arête d'un dièdre droit dont chaque face passe par une droite fixe.

2. — De même qu'il y a des points qui décrivent des éléments de ligne, il y a des plans qui enveloppent des éléments de surface développable, ou, ce qui revient au même, qui ont une même caractéristique pour tous les déplacements du système.

Nous avons vu, en effet, que le point où le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$ touche la surface qu'il enveloppe, se trouve sur la droite qui a pour équations

$$\beta x - \alpha y + k\gamma = o$$
$$p\gamma y - p\beta z + u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta = o.$$

Si ces deux équations représentent deux plans confondus, il y aura une infinités de points de contact sur une même droite. Pour cela, on doit avoir $\beta = o$; et $\frac{p\gamma}{-\alpha} = \frac{u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta}{k\gamma}$.

Ainsi donc, les plans répondant à la question ont pour équation $\alpha x + \gamma z - \delta = o$; les coefficients α, γ, et δ étant liés par la relation

$$u'\alpha^2 + w_1\alpha\gamma + \lambda\delta\alpha + pk\gamma^2 = o.$$

Pour avoir l'enveloppe de ces plans, éliminons d'abord δ.

$$u'\alpha^2 + w_1\alpha\gamma + kp\gamma^2 + \lambda\alpha(\alpha x + \gamma z) = o,$$

ou $$(u' + \lambda x)\alpha^2 + (w_1 + \lambda z)\alpha\gamma + kp\gamma^2 = o.$$

On a l'équation de l'enveloppe en égalant le discriminant à zéro :

$$(w_1 + \lambda z)^2 - 4kp(u' + \lambda x) = o$$

C'est un cylindre parabolique dont la section droite dans le plan zox est une parabole ayant pour sommet le point $z = -\frac{w_1}{\lambda}$, $x = -\frac{u'}{\lambda}$; nous l'avons déjà rencontré dans la 1re partie comme enveloppe des plans doubles.

Nous allons d'ailleurs retrouver cette enveloppe avec les équations actuelles du déplacement. Ces équations appliquées au point de vitesse nulle pour les valeurs t et s du paramètre, sont, en posant $\frac{s}{t} = \mu$:

Digitized by Google

$$(u' + \lambda a)\, t - br\mu\, t = o$$
$$(-pc + \lambda b)\, t + ar\mu\, t = o$$
$$(w_1 + pb + \lambda c)\, t + kr\mu\, t = o$$

Elles montrent que les composantes de la rotation sont p, o, $r\mu$.

Ajoutons-les après les avoir respectivement multipliées par p, o et $r\mu$, il vient

$$pu' + r\mu w_1 + \lambda(ap + \mu rc) + kr^2\mu^2 = o\,;$$

d'où : $$ap + \mu rc = -\frac{kr^2\mu^2 + rw_1\mu + pu'}{\lambda}$$

L'équation du plan double est

$$p(x - a) + \mu r(z - c) = o\,; \quad \text{ou} \quad px + \mu rz = ap + \mu rc\,;$$

où encore : $$px + \mu rz = -\frac{kr^2\mu^2 + rw_1\mu + pu'}{\lambda}\,;$$

ordonnant : $$k\mu^2 r^2 + \mu r(w_1 + \lambda z) + p(\lambda x + u') = o.$$

D'où l'enveloppe : $$(w_1 + \lambda z)^2 - 4pk(u' + \lambda x) = o.$$

3. — En poursuivant l'analogie, on est conduit à penser qu'il y a des droites qui, au lieu d'engendrer des pinceaux, engendrent des éléments de surface réglée, et que ce sont justement les droites qui dans les divers déplacements deviennent des axes instantanés.

On peut se rendre compte qu'il en est bien ainsi. Considérons en effet un point A d'une de ces droites ; dans le déplacement pour lequel cette droite est un axe instantané, l'élément de trajectoire décrit par le point A est dirigé suivant cet axe ; donc la surface engendrée par ce point admet la droite comme tangente. Cette droite se trouve donc tangente aux surfaces trajectoires de tous ses points ; l'élément de surface qu'elle décrit est donc bien déterminé, et le même pour tous les déplacements.

Nous allons déterminer, avec les axes actuels, l'équation de la surface lieu des axes instantanés.

Désignons toujours par μ le rapport $\frac{s}{t}$; les projections de la rotation instantanée sont p, o, μr ; et les équations de l'axe sont $\frac{x-a}{p} = \frac{z-c}{\mu r}$; $y = b$.

Le point (a, b, c) étant le centre instantané, on a

$$-pc + \lambda b + ar\mu = o.$$

Les équations de l'axe deviennent alors

$$\mu rx - pz = a\mu r - pc = -\lambda b\,;\ y = b\,;$$

D'où : $\mu rx - pz + \lambda y = o$, équation d'un plan qui contient l'axe. Comme

Digitized by Google

ce plan passe par la droite fixe $\begin{cases} \lambda y = pz \\ x = o \end{cases}$; on voit que tous les axes instantanés rencontrent cette droite, et comme ils sont parallèles au même plan zox, leur lieu est un conoïde. L'équation de ce lieu s'obtient en éliminant $r\mu$ entre les deux équations $\begin{cases} \mu rx - pz + \lambda y = o \\ y = b \end{cases}$, où b est une fonction de $r\mu$ déterminée par les relations :

$$\begin{cases} -pc + \lambda b + ar\mu = o \\ \lambda c + pb + w_1 + kr\mu = o \end{cases}$$

d'où $\quad b(\lambda^2 + p^2) + \lambda ar\mu + pw_1 + pkr\mu = o;$

et, en vertu de $\quad u' + \lambda a - br\mu = o, \quad b(\lambda^2 + p^2) + b\mu^2 r^2 - u'\mu r + pw_1 + pk\mu r = o$

Remplaçons b par y, et μr par $\frac{pz - \lambda y}{x}$, il vient

$$x^2 y(\lambda^2 + p^2) + y(pz - \lambda y)^2 + x(pz - \lambda y)(pk - u') + pw_1 x^2 = o.$$

Cette équation se réduit aisément à celle qui a été trouvée à la fin de l'étude du déplacement à un paramètre.

Le plan de l'infini coupe cette surface du troisième ordre suivant trois droites, dont deux sont imaginaires. Elles sont respectivement contenues dans les plans $y = o$ et $x^2(p^2 + \lambda^2) + (pz - \lambda y)^2 = o$.

Les génératrices de ce conoïde engendrent pour tous les déplacements, chacune un élément de surface réglée ; on peut voir que l'une des droites du système engendre un élément de surface développable. En effet, la droite $y = o$, $x = -\frac{u'}{\lambda}$ appartient à l'hyperboloïde H_1, dont les normales aux surfaces trajectoires de tous ses points sont perpendiculaires à oz et rencontrent cet axe. Comme la droite elle-même est parallèle à oz, toutes ces normales sont parallèles entre elles ; donc tous les plans tangents aux surfaces trajectoires se confondent en un seul, qui est le plan mené par la droite perpendiculairement au plan formé par l'axe oz et par la droite ; et celle-ci restant, pour tous les déplacements, dans ce plan, engendre un même élément de surface développable.

Lieu des foyers d'un plan.

1. — Soit le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$; écrivons que la vitesse du point a, b, c est perpendiculaire au plan. On a, en désignant toujours $\frac{s}{t}$ par μ :

$$(1) \quad \frac{u' + \lambda a - \mu br}{\alpha} = \frac{-pc + \lambda b + \mu ar}{\beta} = \frac{w_1 + pb + \lambda c + kr\mu}{\gamma}$$

Digitized by Google

En éliminant μ entre ces deux équations, il vient :

$$[(u'\beta + \lambda\beta a + pc\alpha - \lambda ab)]\,(k\alpha + \gamma b) = (\alpha a + \beta b)\,(u'\gamma + \lambda\gamma a - w_1\alpha - p\alpha b - \lambda\alpha c)$$

C'est une quadrique règlée Q, car les équations (1) où μ aurait une valeur déterminée sont celles d'une génératrice de la surface ; on a toutes les génératrices de ce système en faisant varier μ. L'équation développée s'écrit. (en prenant x, y, z comme coordonnées courantes),

$$(Q)\ \lambda\gamma x^2 + (\lambda\gamma - p\beta)y^2 - (\lambda\beta + p\gamma)yz - \lambda\alpha zx - p\alpha xy + (u'\gamma - w_1\alpha - \lambda k\beta)x + (\lambda k\alpha - w_1\beta)y - pk\alpha z - ku'\beta = o$$

Les équations (1) montrent la signification géométrique de la quadrique Q ; c'est le lieu des points dont les vitesses sont, pour les divers déplacements du système, parallèles à une direction donnée α, β, γ. Pour un déplacement déterminé, c'est-à-dire pour une valeur déterminée de μ, le lieu de ces points est une droite représentée par les équations (1) ; quand μ varie, la droite coïncide avec les diverses génératrices de Q.

On peut voir aussi que chaque génératrice contient le centre instantané relatif au déplacement correspondant ; en effet, les coordonnées de ce centre annulent les trois numérateurs des équations (1). Il en résulte que toutes les quadriques Q contiennent la cubique Γ.

Le lieu du foyer du plan donné est l'intersection de ce plan avec la quadrique Q correspondante. On peut voir que cette intersection est un cercle. Il suffit, pour cela, de montrer que par les intersections de la quadrique, du plan donné, et du plan $py + \lambda z + h$, (où h est arbitraire), on peut faire passer une sphère. En effet l'équation

$$\lambda\gamma x^2 + (\lambda\gamma - p\beta)y^2 - (\lambda\beta + p\gamma)yz - \lambda\alpha xz - p\alpha xy + (u'\gamma - w_1\alpha - \lambda k\beta)x + (\lambda k\alpha - w_1\beta)y - pk\alpha z - ku'\beta + (\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta)(py + \lambda z + h) = o$$

est l'équation d'une sphère :

$$\lambda\gamma(x^2 + y^2 + z^2) + (u'\gamma - w_1\alpha - \lambda k\beta + h\alpha)x + (\lambda ka - w_1\beta + h\beta - p\delta)y - (pk\alpha - h\gamma + \lambda\delta)z - (ku'\beta + h\delta) = o$$

On voit ainsi que toutes les quadriques Q ont le plan $py + \lambda z = o$ pour plan de sections circulaires. Cette propriété aurait pu être déduite de ce fait que la cubique Γ passe par les points cycliques du plan $py + \lambda z = o$. Remarquons en effet que ces points cycliques satisfont aux équations. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = o \\ py + \lambda z = o \end{cases}$,

d'où $\dfrac{x}{\pm i\sqrt{\lambda^2 + p^2}} = \dfrac{y}{\lambda} = \dfrac{z}{-p}$. Les équations de la cubique rendues homogènes par le paramètre θ, sont

$$\frac{u'\theta + \lambda x}{y} = \frac{-pz + \lambda y}{-x} = \frac{w_1\theta + py + \lambda z}{-K\theta}$$

Digitized by Google

Pour $\theta = o$, on a $\frac{\lambda x}{y} = \frac{-pz + \lambda y}{-x}$; $py\lambda + z = o$; ces relations sont satisfaites quand on y remplace x, y, z par $\pm i\sqrt{\lambda^2 + p^2}$, λ, $-p$.

2. — L'équation de Q peut s'écrire

$$\alpha(\lambda xz + pyz + w_1 x - \lambda ky + pkz) + \beta(py^2 + \lambda yz + \lambda kx + w_1 y + ku')$$
$$-\gamma[\lambda(x^2 + y^2) - pyz + u'x] = o;$$

ou $\alpha P_2 + \beta P_1 - \gamma H_1 = o$.

P_1, P_2, H_1 sont les premiers membres des équations des deux paraboloïdes et de l'hyperboloïde que nous avons déjà rencontrés et désignés par ces mêmes lettres. Ces trois surfaces passent par la cubique Γ; donc l'équation $Q = 0$ est l'équation générale des quadriques passant par la cubique Γ, si on y regarde α, β, γ comme des paramètres arbitraires.

Le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$ coupe la cubique Γ en trois points, et la quadrique Q suivant un cercle passant par ces trois points; on voit ainsi que *le lieu des foyers d'un plan est le cercle circonscrit au triangle formé par les trois points de ce plan qui, pour certains déplacements, deviennent centres instantanés.*

On peut se rendre compte géométriquement de cette propriété.

Soit F le foyer du plan relatif au mouvement qui déplace le système sans altérer ses dimensions, (le paramètre t étant nul). Dans ce déplacement, une droite quelconque du plan passant par F est normale aux trajectoires de tous ses points.

Considérons maintenant un autre déplacement du système ; chacune des droites que nous venons de considérer a un foyer, et ces foyers se trouvent sur le cercle d'intersection du plan et de la sphère Φ relative à F et à ce déplacement. Tous les points de ce cercle décrivent dans les deux déplacements précédents des éléments perpendiculaires aux droites qui les joignent respectivement à F, et par conséquent leurs surfaces trajectoires sont normales au plan, et dans tous les déplacements, les éléments qu'ils décrivent sont situés respectivement dans des plans perpendiculaires au plan donné. Il y a donc, en général, pour chacun d'eux, une valeur de $\frac{s}{t}$ pour laquelle l'élément de ligne décrit est perpendiculaire au plan.

Ce raisonnement montre encore que la sphère Φ relative à un point quelconque F du système, passe, pour tous les déplacements du système correspondant à toutes les valeurs du rapport des deux paramètres, par un cercle fixe.

Ce cercle se réduit à un point quand le point F est sur la cubique Γ ; la sphère Φ du point F reste alors tangente au plan mené par F normalement à la cubique.

Digitized by Google

On peut aussi présenter ces résultats de la manière suivante qui fait ressortir l'analogie avec le déplacement d'un système plan qui reste semblable à lui-même.

Si l'on considère, parmi les normales aux surfaces trajectoires des points du système, celles qui passent par un point donné F, ces normales sont toutes situées dans un même plan. Ce plan est le plan focal du point F dans le complexe linéaire déterminé par les normales aux cinq surfaces qui définissent le mouvement. Les points où ces normales percent les surfaces correspondantes sont sur un cercle passant par le point fixe, et par les trois points du plan qui peuvent devenir centres instantanés.

On sait que, dans le cas d'un système plan qui se meut dans son plan, *si on considère toutes les droites passant par un point donné, et, sur chaque droite, le point qui décrit une trajectoire normale à la droite, le lieu de ces points est un cercle passant par le point donné et par le centre instantané.*

3. — Si on se reporte à la question qui consiste à déterminer les éléments du déplacement d'un système connaissant les tangentes aux trajectoires de trois points, on voit que, dans le cas où il y a indétermination, c'est-à-dire lorsque les plans normaux aux trajectoires passent par un même point du plan des trois points donnés, et situé sur le cercle de ces trois points, on se trouve dans le cas d'un déplacement à deux paramètres. Les trois points donnés sont évidemment ceux qui dans le déplacement décrivent des éléments de ligne, et appartiennent à la cubique Γ. On comprend maintenant pourquoi on a trouvé, pour le lieu des foyers, un cercle passant par les trois points donnés, et pour la caractéristique, une droite variable passant par un point fixe du plan.

Nous avons vu, dans l'étude du déplacement à un seul paramètre, qu'à une droite D correspond un hyperboloïde H, qui est le lieu des caractéristiques des plans passant par D, que cet hyperboloïde a pour plans de sections circulaires le plan double, et tout plan perpendiculaire à D ; enfin que le lieu des points qui ont pour vitesses les caractéristiques génératrices de H est une cubique gauche.

Considérons les trois points d'intersection A, A′, A″ de cette cubique par un plan perpendiculaire à la droite D. On voit aisément que, si l'on se donne les tangentes aux trajectoires de ces trois points, on se trouve dans un cas d'indétermination ; et qu'on est conduit, non seulement au mouvement à un seul paramètre d'où on est parti, mais à une infinité d'autres ; cependant les hyperboloïdes H relatifs à la droite D dans tous ces déplacements rencontrent le plan A A′ A″ suivant le même cercle. C'est ce qui peut se voir directement dans le cas du déplacement général à deux paramètres.

Digitized by Google

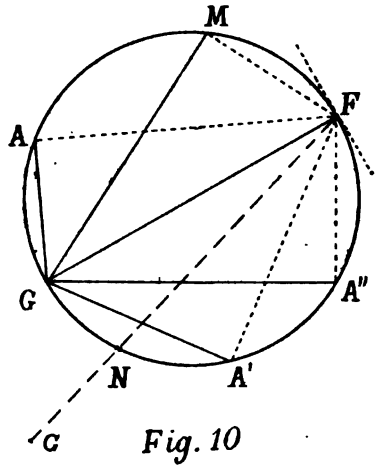


Fig. 10

Je représente le cercle lieu des foyers d'un plan. La cubique Γ rencontre le plan en trois points A, A', A'' qui sont sur le cercle ; soit F (Fig. 10) le foyer relatif au déplacement qui laisse le système invariable, et G le point diamétralement opposé. Les projections sur le plan du cercle des tangentes aux trajectoires des points A, A', A'' concourent au point G. Toute droite qui joint le point F à un point quelconque M du cercle est normale à la surface trajectoire de ce point, et le plan tangent à cette surface est perpendiculaire suivant M G au plan du cercle. Ainsi les plans tangents aux surfaces trajectoires des points du cercle passent tous par la perpendiculaire D menée du point G au plan du cercle. En particulier, la trace du plan tangent à la surface trajectoire du point F est la droite F G.

Pour tous les déplacements, la vitesse du point M est située dans le plan passant par M G et D : donc le point M appartient à la caractéristique de ce plan, et c'est la trace de cette caractéristique sur le plan A A' A''. Le cercle lui-même est donc la trace de l'hyperboloïde H sur ce plan.

Cet hyperboloïde et la sphère Φ relative au point F se coupent suivant ce cercle fixe, et suivant un autre cercle qui passe par le centre instantané et dont le plan n'est autre que le plan double.

4. — Il résulte de ce qui précède que tout plan passant par la normale M F de la surface trajectoire d'un point M, coupe la cubique Γ en trois points qui sont, avec M, sur un même cercle. Proposons-nous de trouver le lieu de ces cercles, pour tous les plans passant par la normale M F. Remarquons que ces cercles appartiennent aux quadriques Q relatives aux plans menés par M F. Ces quadriques, passant toutes par le point M, forment un faisceau. Elles ont donc en commun, outre la cubique Γ, une droite passant par M.

Pour obtenir l'équation du lieu, désignons toujours par P_1, P_2, H_1, les premiers membres des équations des deux paraboloïdes et de l'hyperboloïde qui entrent linéairement dans l'équation de la quadrique Q, et par $P_{1.0}$, $P_{2.0}$, $H_{1.0}$ ces mêmes polynômes où l'on a substitué à x, y, z les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point M. Il suffit d'éliminer α, β, γ entre les équations

$$\begin{aligned}
&\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0\\
&\alpha P_1 \quad +\beta P_2 \quad +\gamma H_1 \quad =0\\
&\alpha P_{1.0} \quad +\beta P_{2.0} \quad +\gamma H_{1.0} \quad =0
\end{aligned}$$

Digitized by Google

On a ainsi l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ P_1 & P_2 & H_1 \\ P_{1.0} & P_{2.0} & H_{1.0} \end{vmatrix} = 0$$

On peut se rendre compte, en calculant les termes du troisième degré que cette surface est une cyclide cubique.

On trouve en effet, comme termes du troisième degré :

$$\lambda (x^2 + y^2 + z^2)(P_{2.0}x - P_{1.0}y)$$

La surface contient les points satisfaisant aux équations

$$\frac{P_1}{P_{1.0}} = \frac{P_2}{P_{2.0}} = \frac{H_1}{H_{1.0}},$$

ou $$P_1 P_{2.0} - P_2 P_{1.0} = 0 \; ; \; P_1 H_{1.0} - H_1 P_{1.0} = 0 \; ;$$

c'est-à-dire les points communs à ces deux quadriques.

Mais cette intersection comprend d'abord la cubique Γ, qui satisfait en effet à $P_1 = P_2 = H_1 = 0$; elle se complète par une ligne droite.

On peut voir que cette droite est celle par laquelle passent toutes les quadriques Q qui contiennent le point M ; en effet, en vertu de la relation

$$\alpha P_{1.0} + \beta P_{2.0} + \gamma H_{1.0} = 0,$$

l'équation de la quatrique Q s'écrit

$$-\beta \frac{P_{2.0}}{P_{1.0}} P_1 - \gamma \frac{H_{1.0}}{P_{1.0}} P_1 + \beta P_2 + \gamma H_1 = 0$$

ou $$\beta (P_{1.0} P_2 - P_{2.0} P_1) + \gamma (P_{1.0} H_1 - H_{1.0} P_1) = 0.$$

C'est une quadrique du faisceau déterminé par les deux quadriques $P_{1.0} P_2 - P_{2.0} P_1 = 0$ et $P_{1.0} H_1 - H_{1.0} P_1 = 0$, dont l'intersection contient ainsi la cubique Γ, et la droite commune à toutes les quadriques Q.

Enfin la cyclide contient aussi la droite $\frac{x-x_0}{P_{1.0}} = \frac{y-y_0}{P_{1.0}} = \frac{z-z_0}{H_{1.0}}$; et il est aisé de voir que c'est la normale à la surface trajectoire du point (x_0, y_0, z_0).

Joignons le point F (Fig. 10), qui est le foyer relatif au déplacement du système variable, au point C où le plan du cercle rencontre l'axe Oz ; la droite CF est perpendiculaire à Oz. Elle rencontre le cercle en un point N, et la normale à la surface trajectoire de ce point est NF. C'est donc un point tel que la normale à sa surface trajectoire est perpendiculaire à Oz et rencontre cet axe ; et il appartient ainsi à l'hyperboloïde H_1. C'est le quatrième point d'intersection du cercle avec la section de H_1 par le plan.

Quand le plan tourne en passant par FM, la droite CF qui s'appuie sur Oz,

Digitized by Google

sur la droite FM, et qui reste perpendiculaire à Oz, engendre un paraboloïde équilatère qui a la génératrice Oz commune avec H_1. La quadrique H_1 et le paraboloïde se coupent donc en outre suivant une cubique gauche qui est le lieu de N. Ainsi H_1 et la cyclide se coupent suivant deux cubiques : celle-ci, et la cubique Γ, qui constituent l'intersection complète des deux surfaces.

Quant au paraboloïde, lieu de la droite CF, remarquons que le plan du cercle, passant par deux de ses génératrices, FM et FC, lui est tangent en F. Ce même plan est aussi tangent en F à la cyclide ; donc le paraboloïde et la cyclide se raccordent tout le long de la droite MF. Nous avons donc comme intersection la cubique lieu de N, et la droite MF comptée deux fois.

Enfin la considération du terme du troisième degré dans l'équation de la cyclide montre que cette surface a une génératrice rectiligne à l'infini dans le plan qui projette MF sur le plan oxy ; or cette droite appartient aussi au paraboloïde. Ainsi l'intersection se compose d'une cubique, d'une droite comptée deux fois, et d'une droite à l'infini.

Correspondance homographique des éléments du premier ordre.

Les composantes δx, δy, δz du déplacement d'un point (a, b, c) étant des fonctions linéaires et homogènes des paramètres s et t, les déplacements de tous les points du système forment, dans leurs plans respectifs, des faisceaux homographiques. Exception est faite, bien entendu, des points de la cubique Γ, pour lesquels les directions de tous les déplacements sont confondues.

Soit le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$; sa caractéristique s'obtient en le coupant par le plan

$$[-p\gamma y + p\beta z - (u'\alpha + w_1\gamma + \lambda\delta)]\, t + [-\beta x + \alpha y - k\gamma]\, rs = o.$$

Ce dernier plan engendre, pour toutes les valeurs de $\frac{s}{t}$, un faisceau homographique de celui des déplacements d'un point.

Ainsi le faisceau des caractéristiques est homographique de celui des déplacements des points. Il faut mettre aussi à part les plans dont la caractéristique est la même pour tous les déplacements du système.

Le foyer du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = o$, se trouve sur la droite

$$\frac{u' + \lambda x - \mu r y}{\alpha} = \frac{-pz + \lambda y + \mu r x}{\beta} = \frac{w_1 + py + \lambda z + k\mu r}{\gamma};$$

il est en particulier sur le plan

Digitized by Google

$$\beta(u' + \lambda x - \mu r y) - \alpha(-pz + \lambda y + \mu r x) = o,$$

ou $$\lambda\beta x - \lambda\alpha y + p\alpha z + \beta u' - \mu r(\beta y + \alpha x) = o,$$

Ce plan détermine sur le plan donné un faisceau homographique de celui des déplacements d'un point. Comme le centre de ce faisceau se trouve sur le cercle, lieu des foyers, on voit que les foyers d'un plan déterminent sur ce cercle une division homographique de celle des déplacements.

Considérons le point C où le plan touche la surface qu'il enveloppe ; ce point est le centre de deux faisceaux : celui des caractéristiques, et celui des déplacements du point C considéré comme un point du système. Ces deux faisceaux ont deux rayons doubles ; pour les déplacements du système qui leur correspondent, les paraboles du complexe des vitesses contenues dans le plan, passent par le point C.

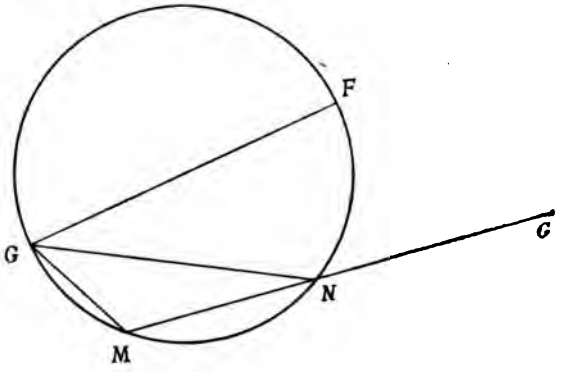


Fig. 11

Traçons par ce point une caractéristique relative à un déplacement quelconque, qui rencontre le cercle des foyers en deux points M, N. Les vitesses de ces deux points sont dirigées vers le point G, diamétralement opposé au foyer F relatif au déplacement qui laisse le système invariable.

La parabole du complexe est inscrite au triangle GMN, et son foyer est sur le cercle circonscrit, ce qui s'accorde bien avec le lieu des foyers du plan.

On voit en même temps que les couples de tangentes menées du point G aux paraboles des complexes de vitesses forment un faisceau involutif. Deux de ces paraboles passent par le point G ; elles ont pour tangentes en ce point les droites qui joignent le point G aux points de contact des tangentes au cercle menées par le point C.

Complexe des vitesses.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, L, M, N$, les coordonnées d'une droite ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, L_1, M_1, N_1$ ce que deviennent ces coordonnées après un déplacement infiniment petit. Pour exprimer que la droite porte la vitesse d'un point du système nous écrirons que la relation d'intersection

Digitized by Google

$$(1) \qquad \alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 + \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N = o,$$

est satisfaite au troisième ordre près.

Nous avons entre les coefficients des développements de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, L_1, M_1, N_1$, des identités obtenues en remarquant que, l'expression $\alpha_1 L_1 + \beta_1 M_1 + \gamma_1 N_1$ devant toujours être nulle, on doit annuler tous les coefficients de son développement. Nous avons déjà écrit précédemment les identités provenant des termes du premier degré.

Ce sont
$$\alpha'_t L + \beta'_t M + \gamma'_t N + \alpha L'_t + \beta M'_t + \gamma N'_t = o$$
$$\alpha'_s L + \beta'_s M + \alpha L'_s + \beta M'_s = o.$$

En vertu de ces identités, les termes du premier degré dans le développement du premier membre de la relation (1), disparaissent.

Les termes du second degré dans l'expression identiquement nulle $\alpha_1 L_1 + \beta_1 M_1 + \gamma_1 N_1$ donnent à leur tour les identités :

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma \alpha'_t L'_t + \frac{1}{2}\left(\Sigma L \alpha''_{t^2} + \Sigma \alpha L''_{t^2}\right) = o \\ \Sigma \alpha'_s L'_s + \frac{1}{2}\left(\Sigma L \alpha''_{s^2} + \Sigma \alpha L''_{s^2}\right) = o \\ \Sigma \alpha L''_{st} + \Sigma L \alpha''_{st} + \Sigma \alpha'_t L'_s + \Sigma \alpha'_s L'_t = o \end{cases}$$

D'autre part, dans le développement de la relation (1), on trouve pour coefficient du terme en t^2 :

$$\frac{1}{2} \Sigma \alpha L''_{t^2} + \frac{1}{2} \Sigma L \alpha''_{t^2};$$

pour le terme en st : $\Sigma \alpha L''_{st} + \Sigma L \alpha''_{st}$;

pour le terme en s^2 : $\frac{1}{2} \Sigma \alpha L''_{s^2} + \frac{1}{2} \Sigma L \alpha''_{s^2}$.

Mais en vertu des identités (2), ces coefficients deviennent respectivement :

$$-\Sigma \alpha'_t L'_t \; ; \; -\Sigma \alpha'_t L'_s - \Sigma \alpha'_s L'_t \; ; \; -\Sigma \alpha'_s L'_s.$$

On a donc, en annulant les termes du second degré dans le développement de l'expression (1).

$$(3) \; t^2 \Sigma \alpha'_t L'_t + (\Sigma \alpha'_t L'_s + \Sigma \alpha'_s L'_t) st + s^2 \Sigma \alpha'_s L'_s = o.$$

Telle est l'équation du complexe des vitesses.

En la développant, on obtient

$$(3)' \; p\left[w_1 \alpha\gamma - u'(\beta^2+\gamma^2) - \lambda(M\gamma - N\beta) - pL\alpha\right] t^2 + \left[\alpha\gamma(kp + u') - w_1(\alpha^2+\beta^2) + \lambda(M\alpha - L\beta) - p(L\gamma + N\alpha)\right] rst - \left[k(\alpha^2+\beta^2) + N\gamma\right] r^2 s^2 = o.$$

L'équation (3) représente le cône ou la conique du complexe suivant que l'on

Digitized by Google

suppose que dans cette équation on ait remplacé α, β, γ, L, M, N par leurs expressions en coordonnées ponctuelles ou tangentielles ; et l'équation

$$(4)\ (\Sigma\, \alpha'_t\, L'_s + \Sigma\, \alpha'_s L'_t)^2 - 4\, \Sigma\, \alpha'_t\, L'_t .\ \Sigma\, \alpha'_s\, L'_s = o,$$

représente l'enveloppe du cône ou de la conique.

Si l'on considère dans l'équation (3) les coordonnées α. β, γ, L, M, N, comme données, on tire de cette équation deux valeurs du rapport $\frac{s}{t}$, qui caractérisent deux déplacements pour lesquels une droite déterminée engendre des éléments de surface développable. Si les coordonnées de la droite donnée satisfont en même temps à l'équation (4), il n'y a qu'un déplacement répondant à la question.

Si maintenant on a à la fois

$$(5)\qquad \Sigma\, \alpha'_t\, L'_t = o\ ;\ \Sigma\, \alpha'_t\, L'_s + \Sigma\, \alpha'_s\, L'_t = o\ ;\ \Sigma\, \alpha'_s\, L'_s = o\ ;$$

l'équation (3) est identiquement satisfaite, et pour tous les déplacements la droite engendre un élément de surface développable. Comme elle appartient à trois complexes, le lieu d'une telle droite est une surface.

Il existe donc une surface règlée dont les génératrices engendrent, pour tous les déplacements, un élément de surface développable.

En général, chaque déplacement élémentaire donne lieu pour une de ces génératrices à un élément différent de surface développable ; il y a lieu de chercher si dans certains cas l'élément engendré peut être toujours le même. D'une manière plus générale, nous nous proposons de rechercher les droites dont les coordonnées α_1, β_1, γ_1 sont des segments qui restent parallèles au même plan $Ax + By + Cz = o$, pour toutes les valeurs du rapport $\frac{s}{t}$.

On doit avoir $A\alpha + B\beta + C\gamma = o$

$$A\,(\lambda\alpha t - \beta rs) + B\,[(\lambda\beta - p\gamma)\,t + \alpha rs] + C\,(p\beta + \lambda\gamma)\,t = o$$

$$\text{ou}\quad \begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = o \\ -A\beta + B\alpha = o \\ -B\gamma + C\beta = o \end{cases}$$

Les solutions réelles sont

$$(1)\ \begin{cases} \alpha = \beta = o \\ B = C = o \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \beta = \gamma = o \\ A = B = o \end{cases}$$

La solution (1) montre que la droite est parallèle à l'axe Oz, et que dans tous les déplacements elle reste parallèle au plan zoy ; la solution (2) donne une

Digitized by Google

droite parallèle à ox, qui reste parallèle au plan yox. En dehors de ces solutions, on trouve les génératrices du cône isotrope $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=o$.

Il faut s'assurer s'il existe une génératrice de la surface définie par les trois complexes qui satisfasse à la solution (1). Soient donc x_0, y_0 les coordonnées du point où la droite perce le plan xoy. Il faut voir si l'on peut annuler les coefficients de l'équation (3)', en y substituant $\alpha=\beta=o$, $L=-\gamma y_0$, $M=\gamma x_0$, $N=o$.

Le coefficient de t^2 donne, pour condition, $-u'\gamma^2-\lambda x_0\gamma^2=o$, ou $x_0=-\frac{u'}{\lambda}$; celui de st donne $y_0=o$; celui de s^2 s'annule de lui-même. On trouve ainsi la droite $y=o$, $x=-\frac{u'}{\lambda}$ que nous avons déjà rencontrée.

Pour la solution (2), on trouve, après substitution, pour le coefficient de s^2 : $k\alpha^2r^2$, qui ne peut s'annuler. Il n'y a donc dans tout le système qu'une droite réelle qui engendre, pour tous les déplacements, un même élément de surface développable.

Pinceau de droites.

Dans le déplacement à deux paramètres, l'ensemble de toutes les positions que peut occuper, à une époque quelconque, une droite donnée, constitue une congruence ; et l'ensemble des positions infiniment voisines d'une position déterminée de la droite forme un pinceau.

Toutes les droites de la congruence sont tangentes en deux points à la *surface focale* de la congruence, et le pinceau est défini par la droite et les plans tangents menés par cette droite à la surface focale ; ces deux plans tangents sont les *plans focaux*.

Pour déterminer les points où la droite

$$x=a+\alpha\rho,\ y=b+\beta\rho,\ z=c+\gamma\rho$$

touche la surface focale, nous écrivons que les déplacements du point (x, y, z) obtenus en faisant varier successivement t et s, et la droite elle-même, sont parallèles à un même plan. On a ainsi l'équation du second degré en ρ

$$\begin{vmatrix} a'_s+\alpha'_s\rho & a'_t+\alpha'_t\rho & \alpha \\ b'_s+\beta'_s\rho & b'_t+\beta'_t\rho & \beta \\ c'_s+\gamma'_s\rho & c'_t+\gamma'_t\rho & \gamma \end{vmatrix}=0$$

Un plan focal est parallèle à la position infiniment voisine de la droite

Digitized by Google

dans le déplacement qui fait engendrer à celle-ci une surface développable.

Soit donc $A_1x + B_1y + C_1z = o$, le plan focal transporté à l'origine ; on doit avoir

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = o$$
$$A_1(\alpha'_t t + \alpha'_s s) + B_1(\beta'_t t + \beta'_s s) + C_1(\gamma'_t t + \gamma'_s s) = o\ ;$$

le rapport $\frac{s}{t}$ étant une des racines de l'équation (3) du paragraphe précédent. On obtient ainsi

$$A_1 = p(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha\gamma\mu_1$$
$$B_1 = -p\alpha\beta - \beta\gamma\mu_1$$
$$C_1 = -p\alpha\gamma + (\alpha^2 + \beta^2)\mu_1$$

μ_1 étant la valeur de $\frac{rs}{t}$ correspondant à une des racines. En échangeant μ_1 en μ_2, qui correspond à l'autre racine, on a les coefficients A_2, B_2, C_2 du second plan focal.

Les deux plans focaux sont perpendiculaires entre eux, si l'on a

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = o$$

relation qui s'écrit

$$(\alpha^2 + \beta^2)\mu_1\mu_2 - p\alpha\gamma(\mu_1 + \mu_2) + p^2(\beta^2 + \gamma^2) = o.$$

Si on y remplace $\mu_1\mu_2$ et $\mu_1 + \mu_2$ par leurs valeurs tirées de l'équation (3)', on obtient

$$-\lambda p\beta[-N(\alpha^2 + \beta^2) + L\alpha\gamma] - \lambda pM\gamma\beta^2 - p^2N\gamma - p^2L\alpha - p^2k\beta^2 - pu'\beta^2 = o$$

ou $\quad \lambda p\beta[-N(\alpha^2 + \beta^2) + L\alpha\gamma] + \lambda pM\gamma\beta^2 - p^2M\beta + p^2k\beta^2 + pu'\beta^2 = o$

ou $\quad \lambda[L\alpha\gamma + M\beta\gamma - N(\alpha^2 + \beta^2)] - [pM - (pk + u')\beta] = o$

$\quad \lambda[-N\gamma^2 - N(\alpha^2 + \beta^2)] - [pM - (pk + u')\beta] = o$

et enfin $\quad \lambda N + pM - \beta(pk + u') = o.$

C'est un complexe du premier ordre.

Faisceaux de plans.

Dans le système que nous étudions, une figure formée de plans passant par une même droite ou par un même point, se déplace comme un système invariable ; nous devons donc retrouver dans l'étude de son déplacement des propriétés qui se rattachent au déplacement d'un système invariable. Ainsi, les normales aux surfaces enveloppées par tous les plans qui passent par un point

Digitized by Google

donné (a, b, c), doivent rencontrer deux droites fixes, et la normale à la surface trajectoire du point rencontre aussi ces deux droites.

C'est ce que va vérifier le calcul suivant :

Soit une droite $x = my + \mu$; $z = ny + \nu$, appartenant au complexe des normales ; le plan tangent à la surface qui admet cette droite pour normale, a pour équation

$$m\left(x + \frac{u'}{\lambda}\right) + y - \frac{p\nu}{\lambda} + n\left(z + \frac{w_1}{\lambda}\right) = o.$$

Si ce plan passe par le point (a, b, c), on a

$$m\left(a + \frac{u'}{\lambda}\right) + b - \frac{p\nu}{\lambda} + n\left(c + \frac{w_1}{\lambda}\right) = o;$$

ou en introduisant les coordonnées α, β, γ, L, M, N de la droite

$$\alpha(\lambda a + u') + \gamma(\lambda c + w_1) + \lambda b \beta - p\mathrm{L} = o$$

On a aussi l'équation du complexe $\mathrm{N} - k\gamma = o$.

Ajoutons après avoir multiplié la 2e équation par une indéterminée θ, il vient

$$(1)\quad \alpha(\lambda a + u') + \lambda b \beta + (\lambda c + w_1 - k\theta)\gamma - p\mathrm{L} + \theta\mathrm{N} = o.$$

Si entre les coefficients de cette équation on a la relation :

$$(2)\quad -(\lambda a + u')p + (\lambda c + w_1 - k\theta)\theta = o,$$

la droite $(\alpha, \beta, \gamma, \mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N})$ rencontre la droite $(-p, o, \theta, \lambda a + u', \lambda b, \lambda c + w_1 - k\theta)$. Comme l'équation (2) donne deux valeurs pour θ, il y a deux droites D, Δ, qui rencontrent les normales ; ces droites sont parallèles au plan zox.

L'équation (2) étant indépendante de b, pour tous les points d'une droite parallèle à l'axe Oy, toutes les droites D sont parallèles entre elles ; de même toutes les droites Δ.

Le point de contact de chaque plan du faisceau avec la surface qu'il enveloppe est le point commun aux projections sur ce plan des droites D et Δ ; on retrouve ainsi la surface du troisième ordre, lieu des points de contact des plans passant par un même point. On voit par là que cette surface a deux séries de sections circulaires situées dans les plans passant par les droites Δ et D ; il y a aussi deux sections circulaires dans les plans menés du point perpendiculairement à ces deux droites ; enfin, ces droites elles-mêmes sont sur la surface.

Si le point P, par lequel passent tous les plans, se trouve sur Oz, on a $a = b = o$; et cette condition introduite dans les coordonnées des droites montre qu'elles rencontrent Oy ; et la projection d'une de ces droites sur le plan xOy a pour équation $-py = \lambda c + w_1 - \theta k$; et en éliminant θ entre cette équation et l'équation (2), il vient

$$(3)\quad py^2 + (\lambda c + w_1)y + ku' = o.$$

Digitized by Google

Il résulte de cette équation que les droites D, Δ correspondant aux divers points de Oz déterminent sur Oy une involution dont l'origine O est le point central.

On peut voir de même que, en projection sur le plan zox, ces couples de droites forment un faisceau involutif auquel appartiennent les axes ox et oz.

Le lieu de ces droites est un conoïde dont l'équation s'obtient en éliminant c entre les équations

$$py^2 + \lambda cy + w_1 y + ku' = o$$

$$pu'\frac{x^2}{z^2} + p\lambda c\frac{x}{z} + pw_1\frac{x}{z} + p^2k = o$$

On obtient ainsi

$$p\,xy^2z - (u'x^2 + pkz^2)\,y + ku'xz = o$$

Vu et approuvé :

Paris, le 16 Mai 1905

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Permis d'imprimer :

Paris, le 16 Mai 1905

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

LIARD.

Digitized by Google

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

Vu et approuvé :
Paris, le 16 Mai 1905
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Permis d'imprimer :
Paris, le 16 Mai 1905
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
LIARD.

Vannes. — Imp. LAFOLYE Frères, 2, place des Lices.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google